# Содержание

# Приклеивание по отображению (повтор)

Пусть $X, Y$ — топологические пространства, $A \subset X$,
$f: A \to Y$ — непрерывное отображение.
Введем отношение эквивалентности $\sim$ на $X \sqcup Y$ — наименьшее отношение эквивалентности такое, что

$$a \sim f(a) \text{ для всех } a \in A$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$.
Операция называется приклеиванием $X$ к $Y$ по $f$.

**Пример**

Пусть $x_0$ и $y_0$ — отмеченные точки в $X$ и $Y$,
$A = \{x_0\}$, $f(x_0) = y_0$.
Результат склеивания — букет $(X, x_0)$ и $(Y, y_0)$.

## Склеивание частей одного пространства

Аналогично определяется склеивание $X$ по отображению $f : A \to X$, где $A \subset X$.
Это факторпространство $X/\sim$, где $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности такое, что $a \sim f(a)$ для всех $a \in A$.

### Пример

Склеим в квадрате $ABCD$ стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ по аффинной биекции между ними, сохраняющей отмеченное направление.
Получится цилиндр $S^1 \times [0,1]$ (упражнение).

### Пример

Склеим стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (отличие — в направлении стрелок).
Получится лента Мёбиуса (лист Мёбиуса).

# Фактор по действию группы

Пусть $X$ — топологическое пространство,
$\Gamma$ — подгруппа группы $Homeo(X)$ — группы всех гомеоморфизмов из $X$ в себя
Введем отношение эквивалентности $\sim$ на $X$:
$x \sim y \iff \exists g \in \Gamma : g(x) = y$
Факторпространство $X/\!\sim$ обозначается $X/\Gamma$ или $\Gamma \backslash X$.

**Пример**

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ параллельными переносами

# Содержание

# Пропускание отображения через фактор

## Теорема

*Пусть* $p\colon X \to X/{\sim}$ *— каноническая проекция,*
$f\colon X \to Y$ *переводит эквивалентные точки в равные:*

$$\forall x, y \in X \quad x \sim y \implies f(x) = f(y)$$

*Тогда*

1. *Существует отображение* $\overline{f}\colon X/{\sim} \to Y$ *такое, что*
$$f = \overline{f} \circ p$$
2. $\overline{f}$ *непрерывно* $\iff$ $f$ *непрерывно.*

# Доказательство

1. Определим $\overline{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$.
Это определение корректно.

2. $\Longrightarrow$: Непрерывность композиции.

2. $\Longleftarrow$:
Пусть $U$ открыто в $Y \implies f^{-1}(U)$ открыто в $X$
$\implies p^{-1}(\overline{f}^{-1}(U))$ открыто в $X$ (то же множество)
$\implies \overline{f}^{-1}(U)$ открыто в $X/\sim$ (по определению факторнтопологии)

## Пример: склеивание концов отрезка

### Теорема

$[0,1]/\{0,1\} \simeq S^1$.

### Доказательство.

Рассмотрим $f\colon [0,1] \to S^1$,

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

Оно пропускается через факторпространство $[0,1]/\{0,1\} \to S^1$.
Соответствующее $\overline{f}\colon [0,1]/\{0,1\} \to S^1$ — биекция.
По теореме $\overline{f}$ непрерывно.
Так как $[0,1]/\{0,1\} \to S^1$ компактно, а $S^1$ хаусдорфово, эта непрерывная биекция — гомеоморфизм. $\square$

# Хаусдорфовы факторы компактов

Точно так же доказывается

**Теорема**

*Пусть $X$ компактно, $Y$ хаусдорфово,*
*$f : X \to Y$ непрерывно и сюръективно.*
*Тогда*

$$Y \simeq X/\sim$$

*где отношение $\sim$ определяется условием*

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

# Стягивание границы шара

## Теорема

$D^n/S^{n-1} \simeq S^n$.

## Доказательство.

Вместо $D^n$ возьмем $B$ — замкнутый шар радиуса $\pi$ с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$.

По теореме, достаточно построить сюръекцию $f\colon B \to S^n$, которая отображает край шара в одну точку, а в остальном инъективно. Подходит такое:

$$f(x) = \left(\frac{x}{|x|}\sin|x|, \cos|x|\right), \qquad x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$$
$$f(0) = (0_{\mathbb{R}^n}, 1)$$

где правые части — из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

# Содержание

# Определение многообразия

Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Определение**

$n$-мерное многообразие — хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, обладающее свойством *локальной евклидовости*:
у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Число $n$ — размерность многообразия.

**Теорема об инвариантности размерности (без док-ва)**

При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.
Как следствие, многообразие размерности $m$ не гомеоморфно многообразию размерности $n$.

# Первые примеры

- 0-мерные многообразия — дискретные пространства (не более, чем счётные)
- Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное многообразие.
- Более общо, открытое подмножество многообразия — многообразие той же размерности.
- Сфера $S^n$ — $n$-мерное многообразие
- Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n/\{id, -id\}$ (склеиваем каждую пару противоположных точек сферы)

**Упражнение**

В диске $D^n$ склеим каждую пару противоположных точек границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

# Многообразия с краем

### Определение

$n$-мерное многообразие с краем — хаусдорфово пространство $M$ со счётной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+ := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называется краем $M$ и обозначается $\partial M$.

### Пример

$D^n$ — многообразие с краем, $S^{n-1}$ — его край.

### Теорема об инвариантности края (без док-ва)

$\mathbb{R}^n_+$ не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$.

# Склеивание поверхности из квадрата

Возьмём квадрат и склеим каждую сторону с противоположной по отображению, сохраняющему длину.
Для каждой пары можно склеивать без переворота или с переворотом. Поэтому есть три случая:

- Обе пары без переворота (схема склейки $aba^{-1}b^{-1}$) — получается тор $S^1 \times S^1$.
- Одна пара с переворотом, другая без (схема $abab^{-1}$) — бутылка Клейна.
- Обе пары с переворотом (схема $abab$) — проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$.

# Склеивание поверхности из многоугольника

## Теорема

1. *Пусть дан правильный $2n$-угольник ($D^2$ с границей, разбитой на $2n$ частей), стороны разбиты на пары и ориентированы.*
   *Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации.*
   *Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).*
2. *Пусть $m$-угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) разбиты на пары, ориентированы и склеены как в п.1.*
   *Тогда получится двумерное многообразие с краем.*

## Замечание

Можно брать и несколько многоугольников и склеивать стороны разных. Сводится к случаю одного многоугольника.

# Содержание

# Компоненты

Любое многообразие (с краем или без) локально линейно связно.
Следовательно, компонетны линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты.
Многообразие — несвязное объединение своих компонент (не более чем счетного числа).
Каждая компонента — тоже многообразие.

**Вывод**

Достаточно изучить связные многообразия

# Одномерные многообразия

**Теорема (пока без док-ва)**

*Пусть $M$ — непустое связное 1-мерное многообразие (возможно, с краем). Тогда*

1. $M$ *компактно, без края* $\implies M \simeq S^1$
2. $M$ *некомпактно, без края* $\implies M \simeq \mathbb{R}$
3. $M$ *компактно,* $\partial M \neq \emptyset \implies M \simeq [0,1]$
4. $M$ *некомпактно,* $\partial M \neq \emptyset \implies M \simeq [0,+\infty)$

**Следствие**

*Компактное 1-мерное многообразие без края — несвязное объединение конечного набора окружностей.*
*И т. д.*

# Сферы с ручками

## Определение

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с $p$ ручками строится так:
Берём сферу $S^2$. Вырезаем $p$ «дырок» — внутренностей непересекающихся дисков $D^2$.
Получилась сфера с $p$ дырками, ее край — $p$ окружностей.
Теперь берем $p$ торов, из каждого аналогично вырезаем дырку.
Край каждой приклеиваем по гомеоморфизму к краю одной из дырок.

## Теорема (без док-ва)

*Результат не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от способа вырезания дырок и выбора приклеивающих гомеоморфизмов.*

# Сферы с плёнками

## Определение

Пусть $q \in \mathbb{N}$. Сфера с $q$ плёнками строится так:
Строим сферу с $q$ дырками. К краю каждой дырки приклеиваем ленту Мёбиуса по гомеоморфизму края (край ленты Мёбиуса — окружность!)

Аналогично, результат не зависит от выбора приклеивающих гомеоморфизмов.

## Упражнение

Сфера с одной плёнкой — $\mathbb{RP}^2$ (проективная плоскость)
Сфера с двумя плёнками — бутылка Клейна.

# Классификация поверхностей

## Определение

Поверхность — связное двумерное многообразие

## Теорема (без док-ва)

- *Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с плёнками.*
- *Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом плёнок попарно не гомеоморфны*
- *Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих примеров с несколькими дырками.*
  *Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.*

## Замечание

Число дырок $=$ числу компонент края.

# Содержание

# Эйлерова характеристика

## Определение

Пусть $M$ — компактная поверхность, разбитая вложенным связным графом на области-диски (замыкание области $\simeq D^2$, граница — цикл в графе).
Пусть $V$ — число вершин, $E$ — число рёбер, $F$ — число областей.
Эйлерова характеристика $M$ — целое число

$$\chi(M) = V - E + F$$

## Теорема

*$\chi(M)$ не зависит от разбиения.*

# Доказательство

Примем без доказательства два свойства:

- Отрезок, соединяющий точки на краю диска, разбивает его на два диска
- Любые два графа можно «пошевелить» гомеоморфизмом так, чтобы они пересекались в конечном числе точек.

Из первого следует, что при измельчении разбиения (добавлении вершин и рёбер) $\chi(M)$ не меняется.

Из второго следует, что у любых двух разбиений есть общее измельчение.

Из этой пары фактов следует теорема.

# Вычисление эйлеровой характеристики

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$
- При вырезании дырки $\chi$ уменьшается на 1.
- $\chi$(сферы с $n$ дырками)$= 2 - n$,
  $\chi$(тора с дыркой)$= -1$, $\chi$(ленты Мёбиуса)$= 0$.
- $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$
- $\chi$(сферы с $p$ ручками)$= 2 - 2p$
- $\chi$(сферы с $q$ плёнками)$= 2 - q$

**Замечание**

Отсюда следует негомеоморфность сфер с разным числом ручек и плёнок.
Сферы с плёнками не гомеоморфны сферам с ручками, так как первые содержат ленту Мёбиуса, а вторые нет (наглядно очевидно, но трудно доказать).