Содержание

Формулировка теоремы Тихонова

Теорема

Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ *— семейство компактных топологических пространств.*
Тогда тихоновское произведение $\prod_{i \in I} X_i$ *компактно.*

Пример

Тихоновский куб — $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ — компактен.

Содержание

Лемма Александера о предбазе

X — топологическое пространство,
Λ — фиксированная предбаза топологии.

Теорема (лемма Александера)

Если из любого покрытия X элементами Λ можно выбрать конечное подпокрытие, то X компактно.

Содержание

Достаточно рассматривать покрытия элементами базы

Пусть Σ — множество всех конечных пересечений элементов Λ. Это база топологии.

Лемма (уже была)

Если из любого покрытия X элементами Σ можно выбрать конечное подпокрытие, то X компактно.

Доказываем теорему от противного.

Назовем плохим покрытием покрытие X элементами Σ, у которого нет конечного подпокрытия.

По лемме плохие покрытия существуют.

Существует максимальное плохое покрытие

Множество всех плохих покрытий частично упорядочено по включению. Докажем, что в нем есть максимальный элемент.

Проверим условия леммы Цорна.

Пусть C — цепь в множестве плохих покрытий.
Рассмотрим $\mathfrak{U}$ — объединение всех элементов C.
Докажем, что $\mathfrak{U}$ — тоже плохое покрытие
(тогда это искомый максимальный элемент).

От противного. Пусть $\mathfrak{U}$ имеет конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_n$. Пусть $\mathfrak{U}_i$ — элемент C, которому принадлежит U_i.
Среди $\mathfrak{U}_i$ есть наибольший (так как их число конечно).
Пусть это $\mathfrak{U}_k$.

Тогда все U_i принадлежат $\mathfrak{U}_k \implies \mathfrak{U}_k$ имеет конечное подпокрытие $\implies \mathfrak{U}_k$ — не плохое. Противоречие.

Главная идея

Пусть $\mathfrak{U}$ — максимальное плохое покрытие,
A — любой из его элементов.
Так как $A \in \Sigma$, $A = A_1 \cap \dots \cap A_n$, где $A_i \in \Lambda$.

Лемма

Хотя бы один из $A_1, \dots, A_n$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Доказательство.

От противного. Так как $A_i \notin \mathfrak{U}$, из максимальности $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \cup \{A_i\}$ — не плохое.
Пусть $\mathcal{M}_i$ — конечное подпокрытие $\mathfrak{U} \cup \{A_i\}$.
Тогда $(\mathcal{M}_1 \setminus \{A_1\}) \cup \dots \cup (\mathcal{M}_n \setminus \{A_n\}) \cup \{A\}$ — конечное подпокрытие $\mathfrak{U}$. Противоречие. $\square$

Завершение доказательства леммы Александера

Пусть $\mathfrak{U}$ — максимальное плохое покрытие.

Из леммы, для любого $A \in \mathfrak{U}$ существует $A' \in \mathfrak{U}$ такой что $A \subset A'$ и $A' \in \Lambda$.

Множество всех таких A' — покрытие X элементами Λ.

По условию леммы Александера, из них можно выбрать конечное подпокрытие. Получили конечное подпокрытие $\mathfrak{U}$. Противоречие.

Содержание

Доказательство теоремы Тихонова — начало

Пусть $X = \prod X_i$,
Ω_i — топология X_i.
$p_i \colon X \to X_i$ — координатная проекция
Λ — стандартная предбаза X из «цилиндров»:

$$\Lambda = \{p_i^{-1}(U) : U \in \Omega_i\}$$

$\mathfrak{U}$ — покрытие X элементами Λ.

По лемме Александера достаточно доказать, что $\mathfrak{U}$ имеет конечное подпокрытие.

Доказательство теоремы Тихонова — окончание

Зафиксируем $i \in I$. Пусть

$$\mathfrak{U}_i = \{U \in \Omega_i : p_i^{-1}(U) \in \mathfrak{U}\}$$

Есть два случая.

- Для некоторого $i \in I$, $\mathfrak{U}_i$ — покрытие X_i.
  По компактности X_i, в $\mathfrak{U}_i$ есть конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_n$.
  Тогда $p_i^{-1}(U_1), \dots, p_i^{-1}(U_n)$ — конечное подпокрытие $\mathcal{U}$.
- Для каждого $i \in I$, $\mathfrak{U}_i$ — не покрытие X_i.
  Выберем точку $x_i \in X_i$, не покрытую элементами $\mathfrak{U}_i$.
  Точка $\{x_i\}_{i \in I} \in X$ не покрыта элементами $\mathfrak{U}$.
  Противоречие.

Содержание

Пространство $\mathcal{F}(X)$

Пусть X — метрическое пространство.

Рассмотрим $\mathcal{F}(X)$ — множество всех ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$. Введем на $\mathcal{F}(X)$ расстояние:

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

Теорема

$\mathcal{F}(X)$ — метрическое пространство.

Доказательство.

Неравенство треугольника для $f, g, h \in \mathcal{F}(x)$:

$$|f(x)-h(x)| \le |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)| \le d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h).$$

Это верно для всех $x \implies d_\infty(f,h) \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$. $\square$

Полнота $\mathcal{F}(X)$

Теорема

$\mathcal{F}(X)$ полно.

Доказательство.

Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{F}(X)$.
Для каждого x рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$.
Она фундаментальна, так как $|f_n(x) - f_k(x)| \leq d_\infty(f, g)$.
$\implies \exists f(x) := \lim f_n(x)$.

Построенная f — предел $\{f_n\}$ в $\mathcal{F}(X)$. $\square$

Содержание

Вложения Куратовского

Теорема

Существует изометрическое (= сохраняющее расстояния) отображение $f\colon X \to \mathcal{F}(X)$.
Название: вложение Куратовского.

Доказательство.

1. Случай ограниченного X. Положим $f(x) = d_x$, где

$$d_x(y) = d(x, y)$$

$|d_{x_1}(y) - d_{x_2}(y)| \le d(x_1, x_2)$ по неравенству треугольника

$\implies d_\infty(f(x_1), f(x_2)) \le d(x_1, x_2)$.

Равенство достигается при $y = x_2$.

2. Общий случай. Зафиксируем $x_0 \in X$ и $f(x) := d_x - d_{x_0}$. $\square$

Содержание

Доказательство теоремы о пополнении

Теорема

Любое метрическое пространство X имеет пополнение $\overline{X}$ ($\overline{X}$ полно, $X \subset \overline{X}$, X всюду плотно в $\overline{X}$).

Доказательство.

Пусть $f\colon X \to \mathcal{F}(X)$ — вложение Куратовского.
Пусть $\overline{X}$ — замыкание $f(X)$ в $\mathcal{F}(X)$.
Оно полно как замкнутое подмножество полного пространства.
Осталось отождествить X и $f(X)$. $\square$

Содержание

Компактные без края

Теорема

Если M *— связное компактное 1-мерное многообразие без края, то* $M \simeq S^1$.

Лемма

Пусть $U, V \subset M$ *— открытые множества, гомеоморфные* $\mathbb{R}$, *и* $U \cap V \neq \emptyset$.
Тогда $U \cup V$ *гомеоморфно либо* $\mathbb{R}$, *либо* S^1.

Лемма $\implies$ Теорема

По компактности M покрывается конечным набором открытых множеств, гомеоморфными $\mathbb{R}$.
Рассмотрим такое покрытие с минимальным числом элементов.

Среди элементов покрытия найдутся U и V с $U \cap V \neq \emptyset$, иначе M не связно или гомеоморфно $\mathbb{R}$ (т.е. не компактно).

По лемме $U \cup V \simeq \mathbb{R}$ или $U \cup V \simeq S^1$.

1. $U \cup V \simeq \mathbb{R} \implies$ покрытие не минимально (заменим U и V на $U \cup V$). Противоречие.

2. $U \cup V \simeq S^1 \implies U \cup V$ компактно
$\implies$ (из хаусдорфовости) замкнуто
$\implies$ открыто и замкнуто
$\implies$ (из связности) $U \cup V = M$
$\implies M \simeq S^1$.

Доказательство леммы

Зафиксируем гомеоморфизмы $\varphi\colon U \to (0,1)$ и $\psi\colon V \to (0,1)$.
Пусть $A = \varphi(U \cap V)$, $B = (\psi(U \cap V)$.
$f = \psi \circ \varphi^{-1}$ — гомеоморфизм между A и B
A и B — открытые множества на прямой $\implies$ они дизъюнктные объединения открытых интервалов.

Пусть $I \subset A$ и $J \subset B$ — такие интервалы, $f(I) = J$.
Гомеоморфизмы интервалов — монотонные биекции.
Они дают соответствие между концами.

Концы I и J внутри $(0,1)$ не могут соответствовать друг другу (противоречит хаусдорфовости).

Окончание следует

Доказательство леммы (окончание)

Остаются два варианта с точностью до перестановки и переворачивания:

1. $I = (a, b)$, $0 < a < b < 1$, $J = (0, 1)$
2. $I = (a, 1)$, $J = (0, b)$, f возрастает

В первом случае $V \subset U$, $U \cup V = U \simeq \mathbb{R}$.

Во втором случае может быть одна или две такие пары интервалов I, J.
Если одна, то $U \cup V \simeq \mathbb{R}$
Если две, то $U \cup V \simeq S^1$

Компактные без края

Теорема

Если M — связное компактное 1-мерное многообразие с краем $\partial M \neq \emptyset$, то $M \simeq [0,1]$.

Доказательство.

∂M — дискретное множество $\implies |\partial M| < \infty$.
Рассмотрим удвоение M — результат склеивания двух копий M по краю.
Это многообразие без края $\implies S^1$.
В удвоении есть конечное подмножество — ∂M, разбивающее его ровно на две части.
Значит, это две точки.
Замыкание каждой части — отрезок. □