Содержание

Произведение топологических пространств

Обозначения

- $X = \prod_{i\in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i

Топология произведения

Пусть $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i\in I}$ — семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ задается предбазой, состоящей из всевозможных «цилиндров» вида

$$p_i^{-1}(U), \quad \text{где } i \in I \text{ и } U \in \Omega_i.$$

Топология, заданная предбазой

- База топологии состоит из всевозможных конечных пересечений элементов предбазы.
- Открытые множества — объединения (конечные и бесконечные) элементов базы.

Конечное произведение

Для конечного произведения

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

база топологии состоит из всевозможных «коробок» вида

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$$

где $U_1 \in \Omega_1,\ U_2 \in \Omega_2,\ \ldots,\ U_n \in \Omega_n$.

Содержание

Непрерывность проекций

$X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение топологических пространств.

Теорема

Координатные проекции $p_i \colon X \to X_i$ непрерывны.

Доказательство.

Для открытого $U \subset X_i$ прообраз $p_i^{-1}(U)$ — элемент предбазы. Следовательно, он открыт. □

Содержание

Отображения в произведение

Общий вид отображения в $X \times Y$

Любое отображение $f\colon Z \to X \times Y$ имеет вид $f = (f_1, f_2)$, т.е.

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z)) \quad \text{для всех } z \in Z.$$

где $f_1\colon Z \to X$ и $f_2\colon Z \to Y$ — некоторые отображения, называемые компонентами f.
И обратно, любая такая пара f_1 и f_2 задает $f\colon Z \to X \times Y$.

Общий случай

Пусть $f\colon Z \to \prod_{i \in I} X_i$. Его компоненты — композиции с проекциями:

$$f_i = p_i \circ f, \quad f_i\colon Z \to X_i, \quad i \in I.$$

Теорема о покоординатной непрерывности

Теорема

Пусть $X = \prod X_i$ *— тихоновское произведение,*
Z *— топологическое пространство,*
$f : Z \to X$ *— отображение,*
$f_i = p_i \circ f$ *— его компоненты* $(i \in I)$.

Тогда два свойства равносильны:

1. f *непрерывно;*
2. *все* f_i *непрерывны.*

Доказательство теоремы

$1 \implies 2$: $f_i = p_i \circ f$ — композиция непрерывных отображений.

$2 \implies 1$: Докажем, что $f^{-1}(U)$ открыто для открытого $U \subset X$.

1. (Общее свойство) Для доказательства непрерывности достаточно проверить, что прообразы множеств из предбазы открыты.
2. Если U — из предбазы, $U = p_i^{-1}(V)$, где $i \in I$ и $V \in \Omega_i$, и

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(V) = f_i^{-1}(V).$$

Это открытое множество, так как f_i непрерывно.

Содержание

Пример: непрерывность по каждой переменной не влечет непрерывность

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную равенством

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$$

- Для каждого фиксированного $y_0 \in \mathbb{R}$, $f(x, y_0)$ — непрерывная функция от x.
- Для каждого фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0, y)$ — непрерывная функция от y.
- Но f разрывна в точке $(1, 0)$.

Содержание

Арифметические операции

Теорема

Сложение, вычитание, умножение — непрерывные функции из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Сложение: $f(x, y) = x + y$.
Вычитание: $f(x, y) = x - y$.
Умножение: $f(x, y) = xy$.

Доказательство теоремы

Проверим непрерывность в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Снабдим $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ стандартной метрикой и проверим непрерывность в точке по ε-δ-определению.

1. Сложение. Пусть $\varepsilon > 0$, положим $\delta = \varepsilon/2$.
Если (x, y) лежит в шаре радиуса δ с центром (x_0, y_0), то

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

откуда

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |(x + y) - (x_0 + y_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \\ &< 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

2. Вычитание — аналогично.

Доказательство теоремы — окончание

3. Умножение. Пусть $\varepsilon > 0$, положим

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M+1}, 1\right\} \quad \text{где} \quad M = \max\{|x_0|, |y_0|\}$$

Если (x, y) лежит в шаре радиуса δ с центром (x_0, y_0), то

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a, \quad \text{где } |a| < \delta \\ y &= y_0 + b, \quad \text{где } |b| < \delta \end{aligned}$$

$$f(x, y) = (x_0 + a)(y_0 + b) = x_0 y_0 + a y_0 + b x_0 + ab$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |a y_0 + b x_0 + ab| &< \delta M + \delta M + \delta^2 \\ &\leq (2M + 1)\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

Сумма, разность, произведение непрерывных функций

Следствие

Пусть X — топологическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Тогда их сумма, разность и произведение тоже непрерывны.

Доказательство.

Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, заданное формулой

$$F(x) = (f(x), g(x)).$$

Оно непрерывно по теореме о покоординатной непрерывности.
Сумма $f + g$ — композиция F и сложения $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Для разности и произведения — аналогично. □

Частное непрерывных функций

Следствие

Пусть X — топологическое пространство,
$f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции.
Тогда их частное f/g непрерывно на своей области определения — множестве $\{g \neq 0\}$.

Примечание:
$\{g \neq 0\}$ — краткая запись для $\{x \in X : g(x) \neq 0\}$.

Доказательство следствия.

Сужение g на множество $\{g \neq 0\}$ непрерывно.
Функция $t \mapsto 1/t : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ непрерывна.
Их композиция — $1/g$, она непрерывна.
f/g — произведение f и $1/g$. $\square$

Формулы

Следствие

Любая функция от n переменных, составленная из элементарных функций и арифметических операций, непрерывна на своей области определения.

Пример

Функция $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2) + e^{xyz},$$

непрерывна.

Упражнение

Пусть X — топологическое пространство,
$f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции.
Тогда $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ — непрерывны.

Содержание

Гомеоморфизм

Пусть X, Y — топологические пространства.

Определение

Гомеоморфизм между X и Y — непрерывная биекция $f\colon X \to Y$ такая, что $f^{-1}\colon Y \to X$ тоже непрерывно.

Определение

X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.
Обозначение: $X \simeq Y$.

Содержание

Свойства

1. Тождественное отображение — гомеоморфизм.
2. Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} тоже.
3. Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.

Теорема

Гомеоморфность — отношение эквивалентности.

Замечания

- Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y.
- Следовательно, гомеоморфные пространства неотличимы с точки зрения топологии.
- Другое название гомеоморфности — топологическая эквивалентность.
- Про гомеоморфные пространства также говорят, что у них одинаковый топологический тип.

Содержание

Пример: непрерывная биекция, но не гомеоморфизм

Обозначение: S^1 — единичная окружность на плоскости с центром в начале координат.

Пусть $f\colon [0, 2\pi) \to S^1$ задано формулой

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

Тогда f — биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1, f непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке $(1, 0)$.

Примеры гомеоморфных пространств

Однотипные интервалы

- Все отрезки гомеоморфны: $[a, b] \simeq [c, d]$.
- Открытые промежутки: $(a, b) \simeq (c, d)$.
- Полуоткрытые промежутки: $[a, b) \simeq [c, d) \simeq (c, d]$.
- Все замкнутые лучи гомеоморфны.
- Все открытые лучи гомеоморфны.

Ограниченные и неограниченные интервалы

- $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$
- $[0, 1) \simeq [0, +\infty)$

Примеры, продолжение

Теорема

Открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Обозначения

D^n — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$
S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$

Теорема

Сфера S^n без точки гомеоморфна $\mathbb{R}^n$.

Упражнение

- Квадрат (с границей) гомеоморфен D^2
- $D^m \times D^n \simeq D^{m+n}$

Топологические свойства

Определение

Топологическое свойство — свойство топологического пространства, которое сохраняется при гомеоморфизмах.

Определение

Топологический инвариант — характеристика (например, числовая) топологического пространства, сохраняющаяся при гомеоморфизмах.

Чтобы доказать негомеоморфность двух пространств, обычно находят топологическое свойство или инвариант, который для них отличается.