Содержание

Пусть $X = (X, \Omega)$ — топологическое пространство.

Определение (напоминание)

База топологии — такое $\Sigma \subset \Omega$, что любое открытое множество является объединением набора элементов Σ.

Определение

База в точке $x \in X$ — такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что

- для любого $V \in \Sigma_x$ верно, что $x \in V$.
  (элементы Σ_x — окрестности точки x).
- Для любой окрестности $U \ni x$ существует такое $V \in \Sigma_x$, что $V \subset U$.

Другое название: база окрестностей точки.

Терминология

Счётное множество — не более, чем счётное

Определение

Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счётности (1АС), если для любой точки $x \in X$ существует счётная база в этой точке.

Определение

Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счётности (2АС), если у него есть счётная база топологии.

Содержание

Из второй аксиомы следует первая

Теорема

2AC $\implies$ *1AC*

Доказательство.

Пусть Σ — база топологии, $x \in X$. Положим

$$\Sigma_x = \{U \in \Sigma : x \in U\}.$$

Тогда Σ_x — база в точке x. $\square$

Аксиомы счётности и метризуемость

Теорема

Все метризуемые пространства удовлетворяют 1AC.

Доказательство.

Шары вида $B_{1/n}(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, — база в точке x. $\square$

Пример

Несчётное дискретное пространство метризуемо, но не удовлетворяет 2AC.

«Обычные» пространства имеют счётную базу

Теорема

$\mathbb{R}$ имеет счётную базу.

Теорема

Если X и Y имеют счётную базу, то $X \times Y$ тоже.

Теорема

Если X имеет счётную базу, то любое его подпространство тоже.

Следствие

Любое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет 2АС.

Доказательства

- $\mathbb{R}$: Положим $\Sigma = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- Произведение
  Пусть Σ_1 — база X, Σ_2 — база Y. Положим
  $$\Sigma = \{U \times V : U \in \Sigma_1,\ V \in \Sigma_2\}$$
  Это база $X \times Y$.
- Подпространство
  Пусть Y — подпространство, Σ — база X. Положим
  $$\Sigma_Y = \{Y \cap U : U \in \Sigma\}.$$
  Это база Y.

Упражнение

1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Наследственные свойства

Определение

Топологическое свойство — наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Примеры

Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC — наследственные свойства.
«Состоит ровно из 5 точек» — не наследственное.

Теорема Линделёфа

Теорема (Линделёф)

Если X удовлетворяет 2AC, то из любого его открытого покрытия можно выбрать счётное подпокрытие.

Определение

Подпокрытие – подмножество покрытия, которое само является покрытием.

Доказательство теоремы Линделёфа

- Пусть Λ — множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия
- Λ — счётное покрытие
- Каждому $U \in \Lambda$ сопоставим какое-нибудь V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.
- Все такие V образуют искомое счётное подпокрытие

Содержание

Всюду плотные множества

Определение

Множество в тополологическом пространстве называется всюду плотным, если его замыкание — все пространство.

Переформулировка

Множество всюду плотно $\iff$ оно пересекается с любым непустым открытым множеством.

Пример

$\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Сепарабельные пространства

Определение

Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счётное всюду плотное множество.

Примеры

- $\mathbb{R}$ сепарабельно
- Если X и Y сепарабельны, то $X \times Y$ тоже
- $\mathbb{R}^n$ сепарабельно
- Любое $X \subset \mathbb{R}^n$ сепарабельно (следует из дальнейшего)

Предупреждение

Сепарабельность — не наследственное свойство

Сепарабельность и счетная база

Теорема

1. *Счетная база (2АС) $\implies$ сепарабельность.*
2. *Для метризуемых пространств сепарабельность $\implies$ 2АС*

Доказательство п.1.

Отметим по точке в каждом элементе базы. Получится всюду плотное множество. □

Доказательство п.2.

Пусть S — счетное всюду плотное множество. Положим

$$\Sigma = \{B_{1/n}(s) : s \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

Это база топологии (см. продолжение). □

Продолжение: почему шары $B_{1/n}(s)$ образуют базу

Достаточно доказать, что для любого открытого U и любой точки $x \in U$ существует такой шар $B_{1/n}(s)$ такой, что $s \in S$ и $x \in B_{1/n}(s) \subset U$.

- Существует шар $B_{1/k}(x) \subset U$
- Существует $s \in S \cap B_{1/2k}(x)$
- Шар $B_{1/n}(s)$, $n = 2k$, подходит

Пример: сепарабельное пространство без счетной базы

Пример (упражнение)

$X = \mathbb{R}$, база топологии — всевозможные интервалы вида $[a, b)$.

- Топология с такой базой существует
- $\mathbb{R}$ с этой топологией сепарабельно
- Нет счетной базы

Содержание

Первая аксиома отделимости (T_1)

Пусть $X = (X, \Omega)$ — топологическое пространство.

Определение

X обладает **свойством T_1**, если для любых различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U$ и $y \in U$.

Другое название

T_1-пространство — пространство, обладающее свойством T_1.

$T_1 \iff$ замкнутость точек

Теорема

$T_1 \iff$ *все одноточечные множества замкнуты.*

Доказательство ($\Longleftarrow$).

Если $\{x\}$ замкнуто, то $X \setminus \{x\}$ открыто, его можно взять в качестве U в определении. $\square$

Доказательство ($\Longrightarrow$).

Зафиксируем $x \in X$ и докажем, что $\{x\}$ замкнуто.

$\{x\}$ замкнуто $\iff X \setminus \{x\}$ открыто

$\iff$ все его точки внутренние

$\iff \forall\, y \in X \setminus \{x\} \quad \exists\, U \in \Omega \quad y \in U \subset X \setminus \{x\}$.

$\iff$ определение T_1. $\square$

Хаусдорфовы пространства (T_2)

Определение

X — хаусдорфово, если для любых различных $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x$ и $V \ni y$ такие, что $U \cap V = \emptyset$.

Другое название: T_2-пространство.

Терминология

Про такие окрестности U и V говорят, что они отделяют x и y друг от друга.

Замечание

Все метрические пространства хаусдорфовы.

Хаусдорфовость $\iff$ замкнутость диагонали

Теорема

X хаусдорфово $\iff$ «диагональ»

$$\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$$

замкнута в $X \times X$.

Доказательство.

Пусть $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$.
$\Longrightarrow$: $U \times V$ — окрестность (x, y), не пересекающая Δ.
$\Longleftarrow$: (x, y) имеет окрестность W из базы, не пересекающая Δ.
W имеет вид $U \times V$, где $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$. $\square$

Регулярные пространства (T_3)

Определение

X — регулярно, если

1. оно обладает свойством T_1
2. для любого замкнутого $A \subset X$ и любой точки $x \in X \setminus A$ существуют открытые множества U и V такие, что $A \subset U$, $x \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Другое название: T_3-пространство.

Переформулировка

X регулярно $\iff$ оно обладает свойством T_1 и

- для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует окрестность $V \ni x$ такая, что $\mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Нормальные пространства (T_4)

Определение

X — нормально, если

1. оно обладает свойством T_1
2. для любых непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset X$ существуют открытые множества U и V такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Другое название: T_4-пространство.

Переформулировка

X нормально $\iff$ оно обладает свойством T_1 и

- для любого замкнутого $A \subset X$ и любого открытого $U \supset A$ существует открытое V такое, что $A \subset V$ и $\mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Замечания

Свойство

$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1$.

Предупреждение о терминах

В некоторых источниках «регулярность» и «нормальность» определяют без T_1.
При таких определениях для свойств T_3 и T_4 используются термины «регулярное хаусдорфово пространство» и «нормальное хаусдорфово пространство».

Наследственность

Упражнение

Свйоства T_1–T_3 наследуются подпространствами и произведениями.
Например, если X и Y регулярны, то $X \times Y$ тоже.

Предупреждение

- Нормальность — не наследственное свойство: существует нормальное пространство X с не нормальным подпространством $Y \subset X$.
- Нормальность не наследуется произведениями: существуют нормальные пространства X и Y такие, что $X \times Y$ не нормально.

Содержание

Все метрические пространства нормальны

Теорема

Все метризуемые пространства нормальны.

Доказательство.

Пусть $X = (X, d)$ — метрическое пространство.
Свойство T_1 очевидно.
Пусть $A, B \subset X$ — дизъюнктные замкнутые множества.
В силу замкнутости A и B:
$\forall x \in A \quad \exists r_x > 0 : \quad B_{r_x}(x) \cap B = \emptyset;$
$\forall y \in B \quad \exists r_y > 0 : \quad B_{r_y}(y) \cap A = \emptyset.$
Объединим шары половинных радиусов:

$$U := \bigcup_{x \in A} B_{r_x/2}(x), \quad V := \bigcup_{y \in B} B_{r_y/2}(y).$$

Тогда $U \cap V = \emptyset$. □

Другое доказательство (план)

Рассмотрим функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

Она корректно определена, непрерывна и принимает значение 0 на A и значение 1 на B.

В качестве U и V можно взять

$$U = \{f < \tfrac{1}{2}\} = f^{-1}((-\infty, \tfrac{1}{2}))$$

$$V = \{f > \tfrac{1}{2}\} = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, +\infty)).$$

Содержание

Лемма Урысона

Теорема (лемма Урысона)

Пусть X нормально, $A, B \subset X$ — замкнутые множества, $A \cap B = \emptyset$.
Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$ такая, что $f|_A = 0$ и $f|_B = 1$.

Доказательство леммы Урысона — 1

Строим открытые множества:

- $U_1 := X \setminus B$
- U_0 — такое, что $A \subset U_0 \subset \mathrm{Cl}(U_0) \subset U_1$
- $U_{1/2}$ — такое, что $\mathrm{Cl}(U_0) \subset U_{1/2} \subset \mathrm{Cl}(U_{1/2}) \subset U_1$
- $U_{1/4}$ — такое, что $\mathrm{Cl}(U_0) \subset U_{1/4} \subset \mathrm{Cl}(U_{1/4}) \subset U_{1/2}$
- $U_{3/4}$ — такое, что $\mathrm{Cl}(U_{1/2}) \subset U_{3/4} \subset \mathrm{Cl}(U_{3/4}) \subset U_1$

И так далее по индукции

- для $\alpha = (2k+1)/2^n$:
  U_α — такое, что $\mathrm{Cl}(U_{k/2^{n-1}}) \subset U_\alpha \subset \mathrm{Cl}(U_\alpha) \subset U_{(k+1)/2^{n-1}}$

Доказательство леммы Урысона — 2

Пусть S — множество двоично-рациональных чисел.
Мы построили семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in S \cap [0,1]}$ такое, что

$$\mathrm{Cl}(U_\alpha) \subset U_\beta \quad \text{при } \alpha < \beta \qquad (*)$$

Доопределим

$$U_\alpha = \emptyset \quad \text{при } \alpha < 0$$

$$U_\alpha = X \quad \text{при } \alpha > 1$$

Теперь свойство $(*)$ выполняется для всех $\alpha, \beta \in S$.

Доказательство леммы Урысона — 3

Определим $f\colon X \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \inf\{\alpha \in S : x \in U_\alpha\}$$

По построению $f(X) \subset [0,1], \quad f|_A = 0, \quad f|_B = 1.$

Доказем, что f непрерывна.
Достаточно проверить, что множества

$$\{f < t\} \quad \text{и} \quad \{f > t\}$$

открыты для любого $t \in \mathbb{R}$.

Почему $\{f < t\}$ открыто

$$\begin{aligned} f(x) < t &\iff \inf\{\alpha \in S : x \in U_\alpha\} < t \\ &\iff \exists \alpha \in S : \quad \alpha < t, \quad x \in U_\alpha \end{aligned}$$

Отсюда

$$\{f < t\} = \bigcup_{\alpha < t} U_\alpha$$

Это объединение открытых множеств.

Почему $\{f > t\}$ открыто

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \inf\{\alpha \in S : x \in U_\alpha\} \\
&= \sup\{\alpha \in S : x \notin U_\alpha\} \\
&= \sup\{\alpha \in S : x \notin \mathrm{Cl}(U_\alpha)\} && \text{из } (*) \\
&= \sup\{\alpha \in S : x \in V_\alpha\}, && \text{где } V_\alpha = X \setminus \mathrm{Cl}(U_\alpha).
\end{aligned}
$$

Далее аналогично предыдущему шагу:

$$
\begin{aligned}
f(x) > t &\iff \sup\{\alpha \in S : x \in V_\alpha\} > t \\
&\iff \exists \alpha \in S : \quad \alpha > t, \quad x \in V_\alpha
\end{aligned}
$$

откуда

$$\{f > t\} = \bigcup_{\alpha > t} V_\alpha$$