Содержание

Определение: связное пространство

X — топологическое пространство.

Определение

X связно, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

Переформулировки

X связно $\iff$

- его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;
- не существует открыто-замкнутых множеств, кроме $\emptyset$ и X; (определение: открыто-замкнутое — открытое и замкнутое)
- не существует сюръективного непрерывного $f : X \to \{0, 1\}$.

Примеры

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из ≥ 2 точек — несвязно
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ несвязно
- $[0,1] \cup [2,3]$ — несвязно
- $\mathbb{Q}$ несвязно

Связные множества

Определение

Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связно как топологическое пространство (с индуцированной топологией).

Упражнения

- Множество $A \subset X$ несвязно $\iff$ оно разбивается на такие непустые B и C, что $\operatorname{Cl} B \cap C = \emptyset$ и $\operatorname{Cl} C \cap B = \emptyset$. (Замыкание — в пространстве X).
- Множество A в метрическом пространстве X несвязно $\iff$ существуют открытые U и V такие, что $A \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$.
- В общей топологии предыдущее свойство неверно.

Отрезок связен

Теорема

Отрезок $[0, 1]$ *связен.*

Доказательство.

Было в анализе: отрезок нельзя разбить на два непустых замкнутых множества (замкнутых в топологии $\mathbb{R}$).
Для подмножеств отрезка замкнутость в $\mathbb{R}$ $\iff$ замкнутость в отрезке. □

Связные множества на прямой

Теорема

Для $X \subset \mathbb{R}$ эквивалентно:

1. *X связно*
2. *X выпукло (т.е. вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)*
3. *X — интервал, точка или $\emptyset$.*

Доказательство

$3 \implies 2$: тривиально.

$2 \implies 3$: если X выпукло, то это интервал между $\inf X$ и $\sup X$

$1 \implies 2$: От противного, пусть X не выпукло.
Тогда найдутся $a, b \in X$, $c \in [a, b]$, $c \notin X$.
Разобьем X на $U = X \cap (-\infty, c)$ и $V = X \cap (c, +\infty)$.
Они открыты в $X \implies X$ не связно.

$2 \implies 1$: От противного, пусть X не связно.
$X = U \sqcup V$, где U, V открыты в X.
Выберем $a \in U$ и $b \in V$, из выпуклости $[a, b] \subset X$.
$[a, b]$ разбивается на $[a, b] \cap U$ и $[a, b] \cap V$.
Они открыты в топологии отрезка $[a, b]$.
Противоречие со связностью отрезка.

Содержание

Непрерывный образ связного связен

Теорема

Пусть X связно, $f : X \to Y$ непрерывно.
Тогда множество $f(X)$ связно.

Доказательство.

От противного, пусть $f(X) = U \sqcup V$, где U, V — непустые открытые в $f(X)$.
Тогда $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ — разбиение X на непустые открытые. $\square$

Теорема о промежуточном значении

Теорема

Пусть X связно, $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $f(X)$ содержит все числа между a и b.

Доказательство.

Из предыдущих теорем
$f(X)$ связно $\implies$ выпукло $\implies$ содержит $[a, b]$. □

Содержание

Определение: компоненты связности

Определение

Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X.

Пояснение

Максимальное — такое, которое нельзя увеличить с сохранением свойства.

Примеры

- У $[0,1] \cap [2,3]$ две компоненты связности — $[0,1]$ и $[2,3]$.
- Компоненты связности $\mathbb{Q}$ — отдельные точки.

Разбиение на компоненты связности

Теорема

Пространство разбивается на компоненты связности.

То есть:

- *каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;*
- *различные компоненты связности не пересекаются.*

Следствие

Пространство несвязно $\iff$ *есть хотя бы две компоненты связности.*

Следствие

Две точки принадлежат одной компоненте связности $\iff$ *существует связное множество, содержащее их обе.*

Лемма об объединении связных множеств

Лемма

Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ *— семейство связных множеств, каждые два из них имеют непустое пересечение. Тогда* $A := \bigcup A_i$ *тоже связно.*

Доказательство.

Пусть A разбивается на непустые открытые U и V (в относительной топологии).
Найдутся $i, j \in I$ такие, что $U \cap A_i \neq \emptyset$ и $V \cap A_j \neq \emptyset$.
Тогда $A_i \subset U$, иначе A_i не связно. Аналогично $A_j \subset V$.
Отсюда $A_i \cap A_j = \emptyset$, так как $U \cap V = \emptyset$.
Противоречие с условием. □

Доказательство теоремы о разбиении на компоненты

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности

Пусть $x \in X$.

Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x.

Такие есть, так как $\{x\}$ связно.

По лемме A связно $\implies$ это компонента связности.

2. Различные компоненты связности не пересекаются

Пусть A и B — компоненты связности.

Предположим, что $A \cap B \neq \emptyset$.

Тогда по лемме $A \cup B$ тоже связно.

Из максимальности A и B, $A \cup B = A = B$.

То есть A и B не различны. $\square$

Замкнутость компонент

Теорема

Компоненты связности замкнуты.

Замечание

Компоненты связности не всегда открыты.
Пример: $\mathbb{Q}$.

Доказательство замкнутости компонент

Лемма

Замыкание связного множества связно.

Доказательство.

Пусть $A \subset X$ связно. Предположим, что $\mathrm{Cl}\, A$ не связно.
Тогда $\mathrm{Cl}\, A$ разбивается на два замкнутых множества B и C
(замкнутость в $\mathrm{Cl}\, A \implies$ замкнутость в X).
Одно из них содержит A, иначе A не связно.
Пусть $B \supset A$, тогда $B \supset \mathrm{Cl}(A)$, так как B замкнуто.
Тогда $C = \emptyset$. □

Доказательство теоремы.

Если компонента связности не замкнута,
то ее замыкание — большее связное множество.
Противоречие с максимальностью компонент. □

Содержание

Определение: линейно связное пространство

X — топологическое пространство.

Определение

Путь в X — непрерывное отображение $\alpha\colon [0,1] \to X$.
Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — **концы** пути (или **начало** и **конец**).
Путь α **соединяет** $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Определение

X **линейно связно**, если для любых двух точек существует путь, соединяющий их.

Пример

Любые две точки p и q в $\mathbb{R}^n$ соединяются отрезком:

$$\alpha(t) = (1-t)p + tq$$

Линейная связность и непрерывность

Теорема

Если X линейно связно, $f : X \to Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.

Доказательство.

Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ и $f(y)$ в $f(X)$. □

Соединимость путём — отношение эквивалентности

Лемма

Соединимость путем — отношение эквивалентности (на множестве точек).

Доказательство.

Рефлексивность: точка соединяется с собой постоянным путём.
Симметричность: если α идёт из x в y, то обратно есть путь $\overline{\alpha}$, определяемый равенством $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$.
Транзитивность: если α идёт из x в y, а β из y в z, построим путь γ, идущий из x в z:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$\square$

Компоненты линейной связности

Определение

Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путём.

Переформулировка

Компоненты линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

Содержание

Линейная связность влечёт связность

Теорема

Если X линейно связно, то оно связно.

Доказательство.

$[0,1]$ связен $\implies$ образ пути связен $\implies$ концы лежат в одной компоненте связности. $\square$

Следствие

Компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.

Связное, но не линейно связное множество на плоскости

Пример

График функции $\cos\frac{1}{x}$ и начало координат:

$$X = \{(x, \cos\tfrac{1}{x}) : x > 0\} \cup \{(0,0)\}$$

Это множество связно, но не линейно связно.

Доказательство примера

1. Связность

График линейно связен $\implies$ связен.

$(0,0)$ — его предельная точка.

X — замыкание графика (в X) $\implies$ X связно.

2. $(0,0)$ не соединяется путём с другими точками

Пусть α — путь с началом $(0,0)$.

Рассмотрим $T = \{t \in [0,1] : \alpha(t) = (0,0)\}$.

T замкнуто как проообраз замкнутого множества (точки).

T открыто в $[0,1]$ (см. далее)

$\implies$ T открыто-замкнутое множество на отрезке

$\implies$ (так как отрезок связен) $T = [0,1]$.

$\implies$ α — постоянный путь в точке $(0,0)$.

Окончание доказательство — почему T открыто в $[0,1]$

Докажем, что любая точка $t_0 \in T$ — внутренняя для T.
По непрерывности $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad |\alpha(t)| < 1$
Докажем, что $\alpha(t) = (0,0)$ для всех $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Пусть $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ таково, что $\alpha(t_1) \neq (0,0)$.
Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$.

По непрерывности $\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

$\implies \alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = (\frac{1}{2\pi n}, 1)$

$\implies |\alpha(t_2)| > 1$, противоречие.

Локальная линейная связность

Определение

Пространство X **локально линейно связно**, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x$ такая, что $V \subset U$.

Пример

Любое открытое множество на плоскости локально линейно связно.

Теорема

В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.

Доказательство

1. Почему компоненты линейной связности открыты

У точки x есть линейно связная окрестность $U \implies$
U содержится в компоненте линейной связности $\implies$
x — внутренняя точка своей компоненты.
Все точки внутренние $\implies$ открытость.

2. Почему они совпадают с компонентами связности

Пространство разбито на открытые связные множества $\{U_i\}$ (компоненты линейной связности).
Тогда любое связное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A).
$\implies$ Это компоненты связности.