Свойство компонент связности, забытое в прошлый раз

Свойство

Любое связное множество содержится в некоторой компоненте связности.

Доказательство.

Пусть A открыто, C — компонента связности, $A \cap C \neq \emptyset$.
$\implies A \cup C$ связно (по лемме об объединении связных множеств).
$\implies A \subset C$ (иначе C — не максимальное связное множество). $\square$

Содержание

1. Линейная связность (окончание)
   - Доказательства негомеоморфности
2. Компактность
   - Определение и примеры
   - Хаусдорфовы компакты
   - Компактность в $\mathbb{R}^n$
   - Центрированные и вложенные семейства
   - Непрерывные отображения компактов

Негомеоморфность интервалов и окружности

Теорема

Интервалы $[0,1]$, $[0,+\infty)$, $\mathbb{R}$, *и окружность* S^1 *— попарно негомеоморфны.*

Доказательство.

- S^1 сохраняет связность при удалении любой точки. Для других это неверно: можно удалить точку так, что остаток будет несвязным.
- $\mathbb{R}$ теряет связность при удалении любой точки.
- У $[0,+\infty)$ есть ровно одна точка, при удалении которой сохраняется связность.
- У $[0,1]$ таких точек две.

$\square$

Плоскость не гомеоморфна интервалу, окружности

Теорема

$\mathbb{R}^2$ *не гомеоморфно никакому интервалу и* S^1.

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества в $\mathbb{R}^2$ связно (точки дополнения соединяются ломаными)

$\square$

Содержание

1. Линейная связность (окончание)
   - Доказательства негомеоморфности
2. Компактность
   - Определение и примеры
   - Хаусдорфовы компакты
   - Компактность в $\mathbb{R}^n$
   - Центрированные и вложенные семейства
   - Непрерывные отображения компактов

Определение: компактное пространство

X — топологическое пространство.

Определение

X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.
Другой термин: X — компакт.

Тривиальные примеры

- Конечные пространства компактны
- Любое антидискретное пространство компактно
- Бесконечное дискретное пространство некомпактно (рассмотрим покрытие точками)
- $\mathbb{R}$ некомпактно
(покрытие интервалами вида $(-n, n)$)

Компактные множества

Определение

Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Замечание

В определении компактности для множества $A \subset X$ под открытым покрытием можно понимать одно из двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A, $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X, $\bigcup U_i \supset A$.

Два варианта определения компактности эквивалентны.

Упражнение

Объединение двух компактных множеств компактно.

Отрезок компактен

Теорема (лемма Гейне-Бореля)

Отрезок $[0, 1]$ *компактен.*

Доказательство

Пусть $I_0 = [0,1]$, $\{U_i\}$ — открытые множества в $\mathbb{R}$, $\bigcup U_i \supset I_0$.
Докажем, что I_0 покрывается конечным числом из них.
От противного.

Пусть I_1' и I_1'' — две половины отрезка, $I_1' = [0, \frac{1}{2}]$, $I'' = [\frac{1}{2}, 1]$.
Одну из половин нельзя покрыть конечным набором множеств U_i (иначе покрыли бы I_0). Обозначим эту половину I_1.

Аналогично для I_1: пусть $I_2 \subset I_1$ — его половина, не покрываемая конечным набором U_i. И так далее.

Получаем последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, каждый вдвое короче предыдущего.

У них есть общая точка x_0. Она лежит в каком-то U_{i_0}.
Этот U_{i_0} содержит I_n при достаточно большом n.
Противоречие с тем, что I_n не покрыть конечным набором U_i.

Замкнутое подмножество компакта — компакт

Теорема

Если X компактно и $A \subset X$ замкнуто, то A компактно.

Доказательство.

Пусть $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми множествами в X.
Добавим в него $X \setminus A$, получим открытое покрытие X.
Выберем конечное подпокрытие и уберем из него $X \setminus A$.
Получим конечное покрытие A исходными множествами. $\square$

Произведение компактов — компакт

Теорема

Если X и Y компактны, то $X \times Y$ тоже.

Доказательство теоремы

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы.
Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми «прямоугольниками» $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X$ и $V_i \subset Y$.

2. Для $x \in X$ рассмотрим «вертикальный слой» $F_x := \{x\} \times Y$
$F_x \simeq Y \implies F_x$ компактно $\implies F_x$ покрывается конечным набором «прямоугольников» $U^x_{i_1} \times V^x_{i_1}, \dots, U^x_{i_n} \times V^x_{i_n}$.

3. Пусть $U^x = U^x_{i_1} \cap \dots \cap U^x_{i_n}$ — пересечение проекций этих «прямоугольников» на X.
Тогда $U^x \times Y$ покрывается теми же «прямоугольниками».

4. Построим такую окрестность U^x для каждой точки $x \in X$ и выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие.
Объединив соответствующие наборы «прямоугольников», получим конечное покрытие $X \times Y$.

Содержание

1. Линейная связность (окончание)
   - Доказательства негомеоморфности
2. Компактность
   - Определение и примеры
   - Хаусдорфовы компакты
   - Компактность в $\mathbb{R}^n$
   - Центрированные и вложенные семейства
   - Непрерывные отображения компактов

Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут

Теорема

Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X.

Доказательство.

Пусть $x \in X \setminus A$. Докажем, что x — внутренняя точка $X \setminus A$.

Из хаусдорфовости, для каждой $a \in A$ есть окрестности $U_a \ni a$ и $V_a \ni x$, $U_a \cap V_a = \emptyset$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A:

$$U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$$

$\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ — окрестность x, не пересекающая A.
$\implies$ x — внутренняя точка $X \setminus A$. $\square$

Хаусдорфов компакт нормален

Теорема

Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.

Доказательство.

1. Регулярность

Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в предыдущем доказательстве.
Тогда $U := \bigcup U_{a_i}$ и $V := \bigcap V_{a_i}$ — открытые множества, $U \supset A$, $V \ni x$, $U \cap V = \emptyset$.

2. Нормальность

Пусть A и B замкнуты, $A \cap B = \emptyset$.
Повторим рассуждение для B вместо x
(используя регулярность вместо хаусдорфовости)
Получим открытые $U \supset A$ и $V \supset B$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Содержание

1. Линейная связность (окончание)
   - Доказательства негомеоморфности
2. Компактность
   - Определение и примеры
   - Хаусдорфовы компакты
   - Компактность в $\mathbb{R}^n$
   - Центрированные и вложенные семейства
   - Непрерывные отображения компактов

Наша цель

Главная теорема

Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно $\iff$ оно замкнуто и ограничено.

Определение: ограниченное множество

Здесь X — метрическое пространство.

Определение

Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Определение

Диаметр множества A: $\quad \operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$

Свойство

A ограничено $\iff \operatorname{diam}(A) < \infty$.
(Следствие: свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства)

Компакт в метрическом пространстве ограничен

Теорема

Компактное метрическое пространство ограничено.

Доказательство.

Зафиксируем $x_0 \in X$. Рассмотрим покрытие всеми шарами вида $B_r(x_0)$, $r > 0$.
У него есть конечное подпокрытие $B_{r_1}(x_0), \ldots, B_{r_n}(x_0)$.
Пусть $R = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Тогда $X \subset B_R(x_0)$. □

Следствие

Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Компактные множества в $\mathbb{R}^n$

Теорема

Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно $\iff$ оно замкнуто и ограничено.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: из предыдущего следствия (верно в любом метрическом пространстве)

$\Longleftarrow$: Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено $\iff$ A содержится некотором кубе $[-a, a]^n$.

Куб компактен как произведение компактов.

A замкнуто и ограничено $\Longrightarrow$ оно замкнутое подмножество компакта $\Longrightarrow$ оно компактно. $\square$

Содержание

1 Линейная связность (окончание)
- Доказательства негомеоморфности

2 Компактность
- Определение и примеры
- Хаусдорфовы компакты
- Компактность в $\mathbb{R}^n$
- Центрированные и вложенные семейства
- Непрерывные отображения компактов

Центрированные семейства

Определение

Набор множеств — центрированный, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Теорема

X компактно $\iff$ любой центрированный набор замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: От противного, пусть $\{A_i\}$ — такой набор и $\bigcap A_i = \emptyset$.
Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие (объединение дополнений $=$ дополнению пересечения).
Выберем из него конечное подпокрытие.
Соответствующие A_i имеют пустое пересечение, противоречие с центрированностью.
$\Longleftarrow$: аналогично. $\square$

Следствие

Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

Доказательство.

Пусть A_0 компактно.
Применим теорему к A_0 в качестве всего пространства и набору множеств $\{A_i \cap A_0\}$ в нем. $\square$

Теорема о вложенных компактах

Теорема

Пусть $\{A_i\}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

Замечание

Обычно эта теорема применяется к последовательностям вложенных компактов: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$.

Доказательство.

Это центрированный набор $\implies$ $\bigcap A_i \neq \emptyset$ по предыдущей теореме. $\square$

Содержание

1 Линейная связность (окончание)
- Доказательства негомеоморфности

2 Компактность
- Определение и примеры
- Хаусдорфовы компакты
- Компактность в $\mathbb{R}^n$
- Центрированные и вложенные семейства
- Непрерывные отображения компактов

Непрерывный образ компакта — компакт

Теорема

Пусть X компактно, $f: X \to Y$ непрерывно.
Тогда множество $f(X)$ компактно.

Доказательство.

Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$.
Тогда $V_i = f^{-1}(U_i)$ образуют открытое покрытие X.
Выберем конечное подпокрытие $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$.
$U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ — искомое подпокрытие $f(X)$. $\square$

Теорема Вейерштрасса

Теорема

*Пусть X компактно, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно.
Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.*

Доказательство.

$f(X)$ компактно $\implies$ замкнуто и ограничено $\implies$ содержит свои sup и inf. $\square$

Непрерывные биекции компактов

Теорема

Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f\colon X \to Y$ — непрерывная биекция. Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство.

f непрерывно $\iff$ прообразы замкнутых множеств замкнуты

f^{-1} непрерывно $\iff$ f-образы замкнутых множеств замкнуты (так как $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$).

Если $A \subset X$ замкнуто

$\implies$ A компактно (замкнутое подмножество компакта)

$\implies$ $f(A)$ компактно (непрерывный образ компакта)

$\implies$ $f(A)$ замкнуто (компакт в хаусдорфовом пр-ве) $\square$

Вложения компактов

Определение

$f : X \to Y$ — **вложение**, если f — гомеорморфизм между X и $f(X)$.

Следствие

Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ непрерывно и инъективно. Тогда f — вложение.