Содержание

Содержание

Комбинаторные проективные плоскости

Определение

Комбинаторная проективная плоскость — множество (элементы которого называют **точками**), в котором задана система подмножеств (называемых **прямыми**) так, что

- Есть хотя бы две прямые
- На каждой прямой есть хотя бы три точки
- Любые две различные точки содержатся в некоторой прямой
- Любые две различные прямые имеют ровно одну общую точку

Роль теорем Паппа и Дезарга

Информация

Комбинаторная проективная плоскость

- Удовлетворяет теореме Паппа $\iff$ это проективная плоскость над некоторым полем.
- Удовлетворяет теореме Дезарга $\iff$ это проективная плоскость над некоторым телом (не обязательно коммутативным).
- Из теоремы Паппа следует теорема Дезарга.

Содержание

Проективный базис

Определение

Пусть X — проективное пространство, $\dim X = n$.
Проективный базис X — набор из $n+2$ точек, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

Пример

Проективный базис прямой — любые три различные точки.

Пример

Проективный базис плоскости — 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой.

Транзитивность на базисах

Теорема

Пусть X, Y *— проективные пространства,* $\dim X = \dim Y = n$*,* $p_1, \dots, p_{n+2} \in X$ *и* $q_1, \dots, q_{n+2} \in Y$ *— проективные базисы. Тогда существует единственное проективное отображение* $F\colon X \to Y$ *такое, что* $F(p_i) = q_i$ *для всех* $i = 1, \dots, n+2$*.*

Примеры

- На прямой проективным преобразованием можно перевести любую тройку различных точек в любую другую, например, в 0, 1 и ∞.
- На плоскости любые 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно проективным преобразованием перевести в вершины квадрата.

Доказательство — начало

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$.

Лемма

Можно выбрать векторы $v_1, \dots, v_{n+2} \in V \setminus \{0\}$, порождающие $p_1, \dots, p_{n+2}$ и такие, что $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$.

Доказательство.

Выберем произвольные $v_1, \dots, v_{n+2}$, порождающие $p_1, \dots, p_{n+2}$. $p_1, \dots, p_{n+1}$ не лежат в одной гиперплоскости $\implies$ $v_1, \dots, v_{n+1}$ не лежат в одной линейной гиперплоскости $\implies$ они образуют базис V $\implies$ v_{n+2} равен линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$.

Среди a_i нет нулей, иначе векторы v_i без одного из них линейно зависимы, а тогда $n+1$ точек лежат в одной гиперплоскости.

Заменим каждый v_i на $a_i v_i$ и всё получится. $\square$

Доказательство — существование

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $Y = \mathbb{P}(W)$. По лемме выберем $v_1, \dots, v_{n+2} \in V$, порождающие $p_1, \dots, p_{n+2}$, и $w_1, \dots, w_{n+2} \in W$, порождающие $q_1, \dots, q_{n+2}$, с равенствами $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$ и $w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i$.

$v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис V, $w_1, \dots, w_{n+1}$ — базис W.

Определим линейную биекцию $L\colon V \to W$ на базисе: $L(v_i) = w_i$ для $i = 1, \dots, n+1$.

По линейности получается $L(v_{n+2}) = w_{n+2}$.

Положим $F = \mathbb{P}(L)$. Тогда $F(p_i) = q_i$ для всех i.

Существование доказано.

Доказательство — единственность

Пусть $F'\colon X \to Y$ — другое проективное отображение, для которого $F'(p_i) = q_i$ при всех i.
Пусть $F' = \mathbb{P}(L')$, где $L'\colon V \to W$ — линейная биекция.

Тогда $L'(v_i) = c_i w_i$ для некоторого $c_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n+2$.

Умножим L' на c_{n+2}^{-1}, от этого $\mathbb{P}(L')$ не изменится.
Мы свели дело к случаю, когда $L'(v_{n+2}) = w_{n+2}$.

Так как $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$, из линейности $L'(v_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} L'(v_i)$

$\implies w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i w_i$.

Разложение по базису $w_1, \dots, w_{n+1}$ единственно $\implies$ все c_i равны 1. $\implies L' = L \implies F' = F$. □

Теорема доказана

Содержание

Двойное отношение

Рассмотрим проективную прямую $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Определение

Пусть $x, y, z, t \in \widehat{\mathbb{R}}$ — различные точки.
Их двойное отношение — число

$$(xy, zt) = \frac{x-z}{y-z} : \frac{x-t}{y-t} = \frac{(x-z)(y-t)}{(y-z)(x-t)} = (zt, xy)$$

Если среди x, y, z, t есть ∞, то бесконечности в числителе и знаменателе сокращаются (как будто $\frac{\infty}{\infty} = 1$). А именно,

$$(xy, z\infty) = \frac{x-z}{y-z} \qquad (xy, \infty t) = \frac{y-t}{x-t}$$

$$(x\infty, zt) = \frac{x-z}{x-t} \qquad (\infty y, zt) = \frac{y-t}{y-z}$$

Двойное отношение и проективные преобразования

Задача

- Проективные преобразования сохраняют двойное отношение.
- Двойное отношение корректно определено на любой проективной прямой, т.е. не зависит от выбора аффинной карты.
- Если у двух четвёрок точек двойне отношения равны, то их можно перевести друг в друга проективным преобразованием.
- Если биекция между проективными прямыми сохраняет двойное отношение, то это проективное отображение.

Содержание

Содержание

Полиномиальные фуккции в $\mathbb{R}^n$

Определение

Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется полиномиальной, если она выражается многочленом от координат.
Её степень $(\deg f)$ — степень этого многочлена (максимальная из степеней одночленов).
Квадратичная функция — полиномиальная степени 2.

Например, $f(x, y) = xy + 2x - y + 3$ — квадратичная функция на $\mathbb{R}^2$.

Полиномы и аффинные преобразования

Теорема

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— полиномиальная функция степени* k*,*
$\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *— аффинное отображение.*
Тогда $f \circ \Phi$ *— полиномиальная функция степени не больше* k*.*

Доказательство.

Подставив в f вместо переменных линейные выражения от координат в $\mathbb{R}^m$ и раскрыв скобки, получим требуемое. $\square$

Следствие

При аффинных биекциях степени полиномиальных функций сохраняются.

Преобразования координат

Определение

Пусть X — аффинное пространство. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется полиномиальной степени k, если она является полиномом степени k относительно какой-нибудь аффинной системы координат.

Теорема

Определение не зависит от выбора координат.

Доказательство.

Переход от одной системы координат к другой — аффинное преобразование набора координат.
Из этого и предыдущего следствия следует требуемое. □

Содержание

Определение

Пусть X — аффинное пространство.

Определение

Гиперповерхность второго порядка (квадрика) — множество нулей квадратичной функции.

Т.е. $M \subset X$ — квадрика, если существует квадратичная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Если $\dim X = 2$ или $\dim X = 3$, то квадрики называют кривыми или поверхностями второго порядка соответственно.

Задача

Если M — квадрика, не являющаяся пустым множеством или аффинным подпространством, то функция f, ее задающая, единственна с точностью до умножения на константу.

Примеры на плоскости (вырожденные)

- $\emptyset$. Это множество корней $x^2 + y^2 + 1 = 0$ и многих других квадратичных функций.
- Одна точка. Например $(0, 0)$ — единственное решение уравнения $x^2 + y^2 = 0$ (и многих других).
- Прямая. Прямая задается уравнением 1-й степени: $ax + by + c = 0$. Если возвести его в квадрат: $(ax + by + c)^2 = 0$, то получится квадратичная функция, задающая ту же прямую.
- Две прямые. Перемножив уравнения прямых:

$$(ax + by + c)(dx + ey + f) = 0,$$

получим уравнение для их объединения.

Замечание

Аналогично, в любом пространстве гиперплоскости и пары гиперплоскостей — квадрики.

Парабола

Здесь и далее всё происходит на евклидовой плоскости Π (евклидовом аффинном пространстве размерности 2).

Определение

Парабола — множество на плоскости, которое в некоторой декартовой системе координат (x, y) задаётся уравнением

$$y = ax^2$$

где $a \neq 0$.

Задача

Пусть ℓ и p — прямая и точка, $p \notin \ell$. Тогда множество точек плоскости, равноудалённых от p и ℓ — парабола.

Эллипс и гипербола

Определение

Эллипс — множество точек $X \in \Pi$ таких, что

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = L,$$

где $F_1, F_2 \in \Pi$ — фиксированные точки (фокусы эллипса), L — константа, $L > d(F_1, F_2)$.

Определение

Гипербола — множество точек $X \in \Pi$ таких, что

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = L,$$

где $F_1, F_2 \in \Pi$ — фиксированные точки (фокусы гиперболы), L — константа, $0 < L < d(F_1, F_2)$.

Канонические уравнения эллипса и гиперболы

Теорема

Для любого эллипса существует декартова система координат (x, y)*, в которой он задаётся уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a, b > 0$ *— константы.*

Теорема

Для любой гиперболы существует декартова система координат (x, y)*, в которой она задаётся уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a, b > 0$ *— константы.*

Доказательство — 1

Запишем единое уравнение для эллипса и гиперболы:

$$|d(X, F_1) \pm d(X, F_2)| = L,$$

где L — положительная константа, $L \neq d(F_1, F_2)$.

При $L > d(F_1, F_2)$ и знаке «$+$» получается эллипс, при $L < d(F_1, F_2)$ и знаке «$-$» получается гипербола.

Если знак $\pm$ не соответствует величине L, то решений нет (по неравенству треугольника).

Доказательство — 2

Введём систему координат так, что фокусы имеют координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$.

Обозначим $L = 2a$, тогда $a > c$ для эллипса и $a < c$ для гиперболы.

Уравнение в этих координатах имеет вид:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Возведём в квадрат и раскроем скобки:

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2 \pm 2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2$$

$$2x^2+2y^2+2c^2 \pm 2\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cx}\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cx} = 4a^2$$

Доказательство — 3

Сократим на 2 и перегруппируем

$$\pm\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cx}\sqrt{x^2+y^2+c^2+2cx} = 2a^2-(x^2+y^2+c^2)$$

Возведём в квадрат. Новых решений не появится, так как неправильный выбор $\pm$ решений не даёт и числа под корнями заведомо неотрицательны (это суммы квадратов).

$$(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx) = \left(2a^2-(x^2+y^2+c^2)\right)^2$$

Частично раскроем скобки, не трогая блок $x^2+y^2+c^2$:

$$(x^2+y^2+c^2)^2-(2cx)^2 = 4a^4+(x^2+y^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)$$

Выражение $(x^2+y^2+c^2)^2$ сокращается и остаётся квадратное уравнение.

Доказательство — 4

Вот это уравнение: $-(2cx)^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2)$

Раскроем скобки, сократим на 4, перенесём и сгруппируем:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Разделим на правую часть. Она не ноль, так как $a \neq c$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Положим $b = \sqrt{|a^2 - c^2|}$. Получилось

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где $\pm$ равен знаку $a - c$. $\square$

Геометрические следствия уравнений

Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Получается из окружности $x^2 + y^2 = 1$ аффинным преобразованием $(x, y) \mapsto (ax, by)$.
- числа a и b — полуоси. При фокусах на горизонтальной оси $a > b$, a — большая полуось, b — малая полуось.

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Состоит из двух ветвей $x = \pm a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$.
- На бесконечности стремится к паре прямых $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$, получаемых из уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Эти прямые — асимптоты.
- Все гиперболы аффинно эквивалентны (переводятся друг в друга аффинными преобразованиями).

Преобразования и сечения

Свойства

1. Образ квадрики при аффинном преобразовании — квадрика.
2. Если M — квадрика в X, и $Y \subset X$ — аффинное подпространство, то $M \cap Y$ — квадрика в Y или всё подпространство Y.

Доказательство.

1. Следует из того, что при аффинных преобразованиях квадратичные функции переходят в квадратичные.
2. Пусть M задано уравнением $f = 0$. Тогда $M \cap Y$ задаётся уравнением $f|_Y = 0$.
Включение $i\colon Y \to X$ — аффинное отображение $\implies$ $f|_Y = f \circ i$ — полином степени не выше 2.
Если степень меньше 2, то это гиперплоскость, $\emptyset$ или Y. $\square$

Пример: конические сечения

Рассмотрим прямой круговой конус в $\mathbb{R}^3$, получаемый вращением прямой $z = ax$, $y = 0$, вокруг оси z.
Он задаётся уравнением

$$|z| = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

или, эквивалентно,

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Это квадратное уравнение $\implies$ сечения конуса плоскостями — кривые второго порядка.

Можно доказать геометрически, что это эллипсы, параболы и гиперболы (для сечений, не проходящих через 0).