Наша дальняя цель — классификация кривых и поверхностей второго порядка (квадрик). В том числе мы докажем (на следующей лекции), что на плоскости нет других квадрих, кроме примеров из прошлой лекции.

Вместо самих квадрик будем классифицировать уравнения, которые их задают.

Общая идея: для каждой квадратичной функции можно выбрать такие координаты, что в них функция записывается особо простой формулой. Из такой формулы легко понять, как выглядит кривая или поверхность с таким уравнением.

Начнем со специального класса функций, называемых квадратичными формами. По сути это квадратичные полиномы без линейной части и свободного члена. Но мы дадим определение, не зависящее от координат. Для него потребуется понятие билинейной формы.

Содержание

Билинейные формы

Пусть X — векторное пространство.

Определение

Билинейная форма на X — отображение

$$B\colon X \times X \to \mathbb{R},$$

линейное по каждому аргументу, т.е. для любого $x \in X$, $B(x, \cdot)$ и $B(\cdot, x)$ — линейные отображения из X в $\mathbb{R}$.

Билинейная форма симметрична, если $B(x, y) = B(y, x)$ для любых $x, y \in X$.

Матрица билинейной формы

Пусть в X выбран базис $v_1, \ldots, v_n$.

Определение

Матрица билинейной формы B относительно базиса $v_1, \ldots, v_n$ — матрица (b_{ij}) размера $n \times n$, где $b_{ij} = B(v_i, v_j)$.

Билинейная форма в координатах

Теорема

Пусть $[B] = (b_{ij})$ *— матрица* B *относительно базиса* $v_1, \ldots, v_n$, $x, y \in X$, $x = \sum x_i v_i$, $y = \sum y_j v_j$ $(x_i, y_j \in \mathbb{R},\ i, j \in \{1, \ldots, n\})$. *Тогда*

$$B(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j \qquad (*)$$

Или, в матричной записи,

$$B(x, y) = [x]^T [B][y],$$

где $[x]$ *и* $[y]$ *— столбцы из координат* x_i *и* y_j.

Доказательство.

Подставим $x = \sum x_i v_i$ и $y = \sum y_j v_j$ в $B(x, y)$ и раскроем скобки, пользуясь билинейностью. □

Соответствие между формами и матрицами

Следствие

Соответствие $B \mapsto [B]$ (при фиксированном базисе) — биекция между множествами всех билинейных форм и множеством всех матриц $n \times n$.

Доказательство.

Инъективность. Формула $(*)$ показывает, что матрица $[B]$ однозначно задаёт форму B.

Сюръективность. Надо доказать, что для любой матрицы (b_{ij}) существует билинейная форма B с такой матрицей. Определим B формулой $(*)$, билинейность следует из формулы. $\square$

Замечание

Симметричным билинейным формам соответствуют симметричные матрицы, и наоборот.

Это следует из определения матрицы билинейной формы и формулы $(*)$.

Замена базиса

Пусть B — билинейная форма, $v_1, \dots, v_n$ и $w_1, \dots, w_n$ — два базиса. В этих базисах билинейнная форма имеет разные матрицы, обозначим их B_1 и B_2. Они связаны между собой так:

Упражнение

Пусть A — матрица перехода от базиса $\{v_i\}$ к базису $\{w_i\}$. Тогда

$$B_2 = A^T B A$$

Содержание

Квадратичные формы

Определение

Квадратичная форма на X — функция $Q\colon X \to \mathbb{R}$, которую можно представить в виде

$$Q(x) = B(x,x), \qquad \forall x \in X$$

где B — некоторая билинейная форма.

Краткое определение: квадратичная форма — диагональ билинейной формы.

Соответствие между билинейными и квадратичными формами

Теорема

Для любой квадратичной формы Q существует единственная симметричная билинейная форма B такая, что

$$Q(x) = B(x, x), \qquad \forall x \in X$$

Доказательство.

Существование. Пусть $Q(x) = B_0(x, x)$, где B_0 — билинейная форма. Зададим B равенством $B(x, y) = \frac{1}{2}(B_0(x, y) + B_0(y, x))$.

Единственность. Если $Q(x) = B(x, x)$ и B симметрична, то $B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$. □

Мы построили каноническое соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами.

Матрица квадратичной формы

Пусть в X выбран базис $v_1, \dots, v_n$.

Определение

Матрица квадратичной формы Q относительно базиса $v_1, \dots, v_n$ — матрица соответствующей симметричной билинейной формы.

Из свойств матриц билинейных форм следует, что матрица квадратичной формы симметрична, и для любой симметричной матрицы есть квадратичная форма с такой матрицей.

Квадратичные формы в координатах

Следствие

Квадратичная форма в координатах имеет вид: для $x = \sum x_i v_i$,

$$Q(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$$

Доказательство.

$Q(x) = B(x, x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$ по формуле для билинейной формы через матрицу. □

Пример

Квадратичная форма на плоскости с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ имеет вид

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Здесь x, y — числа (координаты), а не векторы.

Следствие

Квадратичные формы — то же самое, что однородные полиномы степени 2.
(Определение: однородные полиномы степени k — такие, у которых все одночлены имеют степень k).

Замечание

Константа 0 — особый случай. Это квадратичная форма, но не полином степени 2.

В понятие «однородный полином степени k» обычно включают константу 0, а в понятие «полином степени k» — не включают.

Диагонализация билинейных форм

Далее все происходит в евклидовом векторном пространстве X, т.е. дано скалярное произведение.

Теорема

Для любой симметричной билинейной формы существует ортонормированный базис, в котором её матрица диагональна.

Диагонализация квадратичных форм

Прежде чем доказывать теорему, отметим следствие

Следствие

Для любой квадратичной формы Q существует ортонормированная система координат, в которой Q имеет вид

$$Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — константы, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки x.

Доказательство.

Подставить в формулу для Q в координатах диагональную матрицу (b_{ij}), где $b_{ii} = a_i$ и $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$. □

Пример приведения к диагональному виду

Например, рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ квадратичную форму

$$Q(x, y) = 52x^2 + 72xy + 73y^2$$

(предупреждение: числа подобраны для простого ответа).

Верно равенство

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 = 100\xi^2 + 25\eta^2$$

где

$$\xi = \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y, \qquad \eta = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y$$

Это проверяется подстановкой и раскрытием скобок.

Пример — продолжение

ξ, η — координаты точки (x, y) относительно базиса v_1, v_2, где

$$v_1 = \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right), \qquad v_2 = \left(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}\right)$$

Действительно,

$$\xi v_1 + \eta v_2 = \left(\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y\right)\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right) + \left(\tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y\right)\left(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}\right) = (x, y).$$

Итак, матрица Q в базисе v_1, v_2 — $\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$.

Кроме того, базис v_1, v_2 — ортонормированный: $|v_1| = |v_2| = 1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Комментарии

Задача

Числа на диагонали матрицы определены однозначно с точностью до перестановки.
Т.е. они одни и те же для всех ортонормированных базисов, диагонализирующих данную квадратичную форму.

Замечание

Если не требовать, чтобы базис был ортонормированным, то привести форму к диагональному виду гораздо проще и есть бесконечно много вариантов.
Подробности об этом — в курсе алгебры.

Доказательство теоремы — 1

Индукция по размерности n. База $n = 1$ тривиальна.

План индукционного перехода от размерности $n - 1$ к n:

Пусть B — наша симметричная билинейная форма.
Мы найдем такой вектор v, что $|v| = 1$ и для любого $w \in v^{\perp}$ верно, что $B(v, w) = 0$.

Если такой вектор найдётся, то применим индукционное предположение в гиперплоскости $Y := v^{\perp}$. Это даст ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_{n-1}$ для Y, в котором матрица сужения $B|_{Y \times Y}$ диагональна.

Дополнив базис гиперплоскости вектором $v_n = v$, получаем искомый базис всего пространства.

Доказательство теоремы — 2

Теперь докажем, что существует такой специальный вектор v. Пусть Q — квадратичная форма, соответствующая B, т.е. $Q(x) = B(x, x)$.

Рассмотрим сужение Q на сферу $S := \{x \in X : |x| = 1\}$. Сфера компактна (так как это верно в $\mathbb{R}^n$ и X изометрично $\mathbb{R}^n$), квадратичная форма непрерывна (так как записывается формулой от координат). Поэтому $Q|_S$ достигает максимума.

Пусть максимум достигается на векторе $v \in S$. Это и есть нужный нам вектор.

Докажем это (см. далее).

Доказательство теоремы — 3

Надо проверить, что $B(v,w)=0$, если $w\perp v$. В силу линейности по w, достаточно доказать это только в случае, когда $|w|=1$. Тогда v и w образуют ортонормированный базис в плоскости, которую они порождают.

Рассмотрим $f\colon\mathbb{R}\to X$, заданное формулой

$$f(t)=\cos t\cdot v+\sin t\cdot w$$

По сути это путь, обходящий единичную окружность в плоскости $\operatorname{Lin}(v,w)$.

Имеем $f(t)\in S$ при всех t, и $f(0)=v$. Следовательно, $Q(f(t))$ достигает максимума при $t=0$.

Продифференцируем $g(t)=Q(f(t))$ и воспользуемся тем, что производная в точке максимума равна 0.

Доказательство теоремы — 4

$$g(t) = Q(f(t)) = B(f(t), f(t)) =$$
$$= B(\cos t \cdot v + \sin t \cdot w, \cos t \cdot v + \sin t \cdot w) =$$
$$= \cos^2 t \cdot B(v, v) + \sin^2 t \cdot B(w, w) + 2 \sin t \cos t \cdot B(v, w)$$

(используя билинейность и симметричность B.)

Дифференцируем в нуле, первые два слагаемых дают 0, и остаётся:

$$g'(0) = 2B(v, w)$$

Так как $g'(0) = 0$, получаем, что $B(v, w) = 0$, что и требовалось.

Теорема доказана

Содержание

Формулировка

Теперь дело происходит в евклидовом аффинном пространстве X, т.е. начало отсчёта не фиксировано.

Теорема

Пусть $F\colon X \to \mathbb{R}$ — квадратичная функция. Тогда существует декартова система координат (т.е. начало отсчёта и ортонормированный базис) такая, что в этой системе координат F имеет или такой вид:

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 + c,$$

или такой:

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки x, $a_1, \ldots, a_n$, b, c — константы, причём $b > 0$.

Доказательство — 1

Выберем временное начало отсчёта и запишем F в виде

$$F(x) = Q(x) + L(x) + C,$$

где Q — квадратичная форма, L — линейная функция, C — константа.

Для этого достаточно записать F в произвольной системе координат в виде многочлена и отнести в Q одночлены степени 2, в L — одночлены степени 1, а в C — свободный член.

Замечание: можно доказать, что разложение F на Q, L и C не зависит от выбора системы координат, но мы не будем этим пользоваться.

Доказательство — 2

Теперь поменяем координаты, заменив базис на такой ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_n$, в котором матрица Q диагональна. Он существует по предыдущей теореме. Используя обозначения $x_1, \ldots, x_n$ для координат в этом базисе, запишем:

$$Q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$$

(из теоремы) и

$$L(x) = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n$$

(любая линейная функция в любых координатах имеет такой вид). Итак,

$$F(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + C \qquad (**)$$

Доказательство — 3

Теперь будем менять начало отсчёта, уменьшая число ненулевых коэффициентов в формуле.

Если есть i, для которого $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$, перемещаем начало отсчёта в точку $-\frac{b_i}{2a_i} v_i$, где v_i — соответствующий базисный вектор.

Координатная функция x_i заменится на новую координатную функцию ξ_i, которая связана с x_i равенством $x_i = \xi_i - \frac{b_i}{2a_i}$.

Соответствующие члены в формуле для F выражаются через ξ_i так:

$$a_i x_i^2 + b_i x_i = a_i(\xi_i - \tfrac{b_i}{2a_i})^2 + b_i(\xi_i - \tfrac{b_i}{2a_i}) = a_i \xi_i^2 - \tfrac{b_i^2}{4a_i}.$$

Переименовав ξ_i в x_i, получаем формулу того же вида $(**)$, где коэффициент b_i стал нулем и как-то изменился свободный член.

Доказательство — 4

Сделав все такие сдвиги начала остчёта, получим формулу $(**)$, в которой для каждого i хотя бы один из коэффициентов a_i и b_i равен 0.

Перенумеруем координаты так, чтобы сначала шли те, чьи коэффициенты a_i не равны 0. Формула примет вид

$$F(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_k x_k^2 + b_{k+1} x_{k+1} + \ldots + b_n x_n + c,$$

где k — количество ненулевых коэффициентов a_i (может быть от 0 до n).

Если все b_i равны 0, то это уже окончательная формула и доказательство в этом случае заканчивается.

Доказательство — 5

Предположим, что среди b_i есть ненулевые. Тогда еще раз меняем базис: $v_1, \ldots, v_k$ оставляем теми же, v_n заменяем на вектор

$$v := \frac{b_{k+1}v_{k+1} + \ldots + b_n v_n}{b},$$

где $b = \sqrt{b_{k+1}^2 + \ldots + b_n^2}$, а остальные выбираем так, чтобы дополнить набор $v_1, \ldots, v_k, v$ до ортонормированного базиса. В новом базисе ставим v на последнее место.

Заметим, что линейную часть последней формулы для $F(x)$ можно переписать в виде:

$$b_{k+1}x_{k+1} + \ldots + b_n x_n = b\langle x, v\rangle,$$

а $\langle x, v\rangle$ — это последняя координатная функция относительно нового базиса.

Доказательство — 6

Переобозначив новые координаты опять буквами $x_1, \dots, x_n$, получаем почти окончательную формулу

$$F(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_k x_k^2 + b x_n + c,$$

где $b > 0$.

Наконец, переместим начало отсчёта вдоль последней координаты на $-\frac{c}{b_n}$. В новых координатах в формуле не будет свободного члена c, а остальные члены не изменятся.

Получили формулу второго типа из теоремы.
Теорема доказана