На прошлой лекции было доказана, что любая квадратичная функция в подходящих декартовых координатах имеет вид

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 + c,$$

или

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки x, $a_1, \ldots, a_n$, b, c — константы, причём $b > 0$.

Пользуясь этим, разберемся, какие бывают квадрики на плоскости и в $\mathbb{R}^3$.

Содержание

Формулировка

Теорема

Любая квадрика на плоскости относится к одному из следующих типов

1. *пустое множество*
2. *точка*
3. *прямая*
4. *две параллельные прямые*
5. *две пересекающиеся прямые*
6. *парабола*
7. *эллипс*
8. *гипербола*

Комментарии

Легко доказать, что перечисленные классы не пересекаются. Например, эллипс не является парой прямых и т. д.

Более того, при аффинных преобразованиях тип квадрики сохраняется: эллипсы переходят в эллипсы, параболы — в параболы и т.д.

Чтобы доказать это, достаточно для каждого типа квадрик указать аффинно-инвариантное свойство, которое отличает его от остальных. Например:

- Гипербола — несвязное множество (а остальные связны)
- Эллипс — ограниченное множество, в котором больше одной точки
- Парабола — связная, неограниченная, не содержит прямых

Из таких свойств и теоремы следует, что квадрики указанных типов при аффинных преобразованиях переходят в квадрики того же вида. Для других видов это очевидно.

Комментарии — 2

И обратно, для любых двух квадрик одного вида (например, двух гипербол) можно перевести одну в другую аффинным преобразованием.
Для видов 1–5 это очевидно, а для эллипсов, парабол и гипербол доказывается так:

Сначала находим системы координат, в которых уравнения двух данных квадрик имеют стандартный вид. Например, для гиперболы это $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

После этого делаем движение, которое одну систему координат переводит в другую. Получились две, например, гиперболы, которые в одной системе координат задаются стандартными уравнениями, которые отличаются только значениями коэффициентов.

(продолжение следует)

Комментарии — 3

Перевести друг в друга стандартные уравнения с разными коэффициентами можно растяжениями вдоль координатных осей.

Рассмотрим, например, растяжение $(x, y) \mapsto (kx, y)$, где $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если квадрика задавалась уравнением $F(x, y) = 0$, то её образ задается уравнением $F(k^{-1}x, y) = 0$.

Это значит, что уравнение новой квадрики получается так: коэффициент при x^2 умножается на k^{-2}, коэффициенты одночленов, где x в первой степени, умножаются на k^{-1}.

Таким способом можно поменять коэффициенты a и b уравнения гиперболы на любые другие, аналогично для параболы и эллипса.

Комментарии — 4

Итак, теорема описывает аффинную классификацию квадрик: если считать эквивалентными квадрики, переходящие одна в другую при аффинном преобразовании, то классы эквивалентности — ровно те, которые написаны в теореме.

Теперь начнём доказывать теорему.

Доказательство — 1

Выберем декартову систему координат, в которой функция F, задающая квадрику, задаётся одним из выражений с первого слайда. То есть, квадрика задается уравнением вида

$$ax^2 + by^2 + c = 0 \tag{1}$$

или

$$ax^2 + by = 0 \tag{2}$$

где x, y — координаты точки, a, b, c — константы. При этом хотя бы один из коэффициентов при x^2 и y^2 не равен 0, иначе степень меньше 2.

Тип квадрики определяется знаками коэффициентов. Переберем все варианты.

Доказательство — 2

В случае уравнения вида (2) можно разделить уравнение на b (так как $b > 0$), после чего оно принимает вид $y = kx^2$. Это парабола.

Осталось исследовать уравнения вида (1). Есть два основных подслучая: $c = 0$ и $c \neq 0$.

Случай $c = 0$ проще, разберём его первым. Уравнение принимает вид

$$ax^2 + by^2 = 0 \tag{3}$$

Доказательство — 3

Разберем подслучаи для уравнения (3).

- Один из коэффициентов a и b равен 0. Для определённости, пусть $b = 0$ (иначе поменяем местами координаты). Делим на a, получаем уравнение $x^2 = 0$. Это прямая.
- a и b одного знака. Для определённости пусть $a, b > 0$ (иначе умножим уравнение на -1). Тогда $ax^2 + by^2 > 0$, за исключением точки $(x, y) = (0, 0)$. Итак, в этом случае квадрика — точка.
- a и b разных знаков.
  Для определенности пусть $a > 0$, $b < 0$.
  Тогда $a = p^2$, $b = -q^2$, где $p, q > 0$.
  Уравнение принимает вид $p^2x^2 - q^2y^2 = 0$.
  Оно раскладывается на множители: $(px - qy)(px + qy) = 0$.
  Это две пересекающиеся прямые.

Доказательство — 3

Теперь разберём случай $c \neq 0$ в уравнении (1). Переносим c в правую часть, делим на правую часть, переобозначаем коэффициенты. Получаем уравнение

$$ax^2 + by^2 = 1 \tag{4}$$

где a, b — другие константы.

Доказательство — 4

Подслучаи уравнения (4):

- $a, b \leq 0$. Тогда $ax^2 + by^2 \leq 0$ для любых x, y. Решений с правой частью 1 нет, это пустое множество.
- Один из коэффицинтов a, b равен 0, другой > 0. Для определённости пусть $a > 0$, $b = 0$. Уравнение принимает вид $ax^2 = 1$. Это две параллельные прямые, $x = \pm 1/\sqrt{a}$.
- $a, b > 0$. Записывая $a = 1/p^2$, $b = 1/q^2$, получаем уравнение
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$
Это эллипс.
- a и b разных знаков. Для определённости пусть $a > 0$, $b < 0$ (иначе переобозначим координаты x и y). Запишем $a = 1/p^2$, $b = -1/q^2$, получаем уравнение
$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$$
Это гипербола. Теорема доказана.

Содержание

Поверхности второго порядка в $\mathbb{R}^3$ классифицируются аналогичным перебором случаев. Перебор длинный, но тривиальный, содержательной математики в нём нет.
Но полезно понимать, как выглядят эти поверхности.
Рекомендуется поискать их названия в интернете и посмотреть картинки. Хорошие картинки есть, например, в Википедии.

Вспомним, что выбором подходящих координат уравнение приводится к виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$$

или

$$ax^2 + by^2 + cz = 0,$$

где x, y, z — координаты точки.

В классификации выделяют (пересекающиеся) группы поверхностей: цилиндры, параболоиды, конусы, гиперболоиды.

Цилиндры

Рассмотрим случай, когда одна из переменных x, y, z фактически не входит в уравнение, так как соответствующий коэффициент равен 0.
Переобозначив переменные, будем считать, что это z.

Остается уравнение, в которое входят только x и y, но оно рассматривается как уравнение от трёх переменных x, y, z.

Так как уравнение не зависит от z, множество решений равно $M \times \mathbb{R}$, где $M \subset \mathbb{R}^2$ — множество решений в xy-плоскости.
Такое множество называется цилиндром над M.

Так как M — квадрика на плоскости, классификация цилиндрических квадрик в $\mathbb{R}^3$ получается из классификации квадрик в $\mathbb{R}^2$.

Цилиндры — 2

Вот список типов цилиндрических квадрик:

1. цилиндр над $\emptyset$ — $\emptyset$.
2. над точкой — прямая.
3. над прямой — плоскость
4. над парой параллельных прямых — параллельные плоскости
5. над парой две пересекающихся прямых — пересекающиеся плоскости
6. над параболой — параболический цилиндр
7. над эллипсом — эллиптический цилиндр
8. над гиперболой — гиперболический цилиндр

Параболоиды

Параболоиды — решения уравнений, в которых в простейшем виде есть линейный член, т.е. вида $ax^2 + by^2 + cz = 0$. Делением на константу приводится к виду

$$z = ax^2 + by^2$$

(a и b — другие константы). Таким образом, поверхность является графиком квадратичной формы.

Числа a и b не могут быть оба нулями. Можно считать, что $a \neq 0$ (иначе поменяем ролями x и y).

Если $a < 0$, поменяем направление оси z, получим уравнение того же вида с коэффициентом $-a$ при x^2. Поэтому достаточно рассмотреть случай $a > 0$.

Параболоиды — 2

Итак, в подходящей системе координат уравнение параболоида имеет вид $z = ax^2 + by^2$, где $a > 0$. В зависимости от знака b есть три вида параболоидов:

- $b > 0$ — эллиптический параболоид
- $b < 0$ — гиперболический параболоид
- $b = 0$ — параболический цилиндр (он уже был в списке цилиндров)

Параболоиды — дополнение

Упражнение

Параболоиды (включая параболический цилиндр) — те и только те квадрики, у которых нет центра симметрии.

Конусы

Осталось разобрать уравнения вида $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$, где $a, b, c \neq 0$. Сначала разберём случай $d = 0$. Заметим, уравнение можно умножить на -1 и добиться того, что среди a, b, c положительных больше, чем отрицательных. После этого остаётся два подслучая.

1. $a, b, c > 0$. Тогда $ax^2 + by^2 + cz^2 \geq 0$ с равенством только при $x = y = z = 0$. Множество решений — точка.
2. Среди a, b, c два положительноых числа и одно отрицательное. Это эллиптический конус.

   (Если, например, $a, b > 0$ и $c < 0$, то это конус, порожденный эллипсом $ax^2 + by^2 = 1 - c$ в плоскости $z = 1$.)

Индикатрисы невырожденных квадратичных форм

Осталось разобрать уравнения вида $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$, где $a, b, c, d \neq 0$. Умножая на константу, можно привести уравнение к виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

(где a, b, c — новые ненулевые константы).

Определение

Индикатриса квадратичной формы Q на векторном пространстве X — множество $\{v \in X : Q(v) = 1\}$.

Таким образом, мы изучаем индикатрису квадратичной формы вида $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$. Вместо a, b, c будем записывать коэффициенты в виде $\pm\frac{1}{a^2}$, $\pm\frac{1}{b^2}$, $\pm\frac{1}{c^2}$.

С точностью до перестановки координат есть 4 случая знаков коэффициентов — существенно только то, сколько среди них положительных и отрицательных.

Эллипсоиды

Если все коэффициенты положительны, то поверхность — эллипсоид.

Таким образом, эллипсоид задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c > 0$. Эллипсоид получается из стандартной сферы растяжениями вдоль координатных осей с коэффициентами a, b, c. Числа a, b, c называются полуосями эллипсоида.

Эллипсоиды в старших размерностях

Прервём временно перечисление квадрик в $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим векторное пространство X произвольной размерности.

Определение

Квадратичная форма $Q\colon X \to \mathbb{R}$ называется положительно определённой, если $Q(v) > 0$ для всех $v \in X \setminus \{0\}$.
Эллипсоиды — индикатрисы положительно определённых квадратичных форм и их образы при параллельных переносах.

На аффинном языке можно определить эллипсоиды как множества, которые при подходящем выборе начала отсчёта становятся индикатрисами оложительно определённых квадратичных форм.

Так же как в 3-мерном случае, из теоремы о диагонализации следует, что любой эллипсоид получается из сферы растяжениями вдоль ортогональных осей.

Гиперболоиды

Гиперболоиды — решения уравнений

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где среди знаков есть и плюсы, и минусы.
Если в уравнении два плюса и один минус, например,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

то это однополостный гиперболоид,
а если два минуса и один плюс, например,

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

то это двуполостный гиперболоид.

Последний случай

Остался последний случай: уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Оно задаёт пустое множество.

Это заканчивает перечисление квадрик в $\mathbb{R}^3$.

Формально это был большой список определений типа «таким-то термином называется множество решений уравнения такого-то вида в некоторой системе координат», и (тривиальное) доказательство того, что любая квадрика относится хотя бы к одному из перечисленных видов.

Аффинная классификация

Задача

Напишите список всех случаев и докажите, что он даёт аффинную классификацию квадрик в $\mathbb{R}^3$.
То есть, любая квадрика принадлежит ровно одному из видов, вид квадрики сохраняется при аффинных преобразованиях, и любые две квадрики одного вида можно перевести друг в друга аффинными преобразованиями.