Содержание

Проективные квадрики

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}(V)$.

Определение

Проективная квадрика в $\mathbb{P}(V)$ — проективизация множества нулей квадратичной формы, заданной на V.

Замечание (корректность определения)

Квадратичная форма $\mathbb{Q}\colon V \to \mathbb{R}$ однородна.
Если $Q(v) = 0$, то $Q(tv) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.
$\implies$ для каждой точки из $\mathbb{P}(V)$ все порождающие ее векторы из V либо лежат в множестве нулей Q, либо все не лежат.

Пример

Рассмотрим в $\mathbb{RP}^2$ с координатами $(x : y : z)$ уравнение

$$x^2 - yz = 0$$

Оно однородно степени 2, поэтому множество решений — проективная квадрика.

Рассмотрим аффинную карту $\{z \neq 0\}$.
Она отождествляется с $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$.
Подставляя $z = 1$, получаем, что аффинная часть — парабола $y = x^2$.

Кроме аффинной части, на этой квадрике есть одна бесконечно удалённая точка $(0 : 1 : 0)$.

Проективное пополнение квадрики

Рассмотрим аффинное пространство X и его проективное пополнение $\widehat{X}$.
Пусть $M \subset X$ — квадрика, заданная уравнением $F(x) = 0$.

Теорема

Существует проективная квадрика $\widehat{M} \subset \widehat{X}$ *такая, что*

$$\widehat{M} \cap X = M.$$

Примечание: существенно не только существование, но и то, как она строится в доказательстве.

Доказательство теоремы

Выберем систему координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в X. Ей соответствуют однородные координаты $(x_1 : \ldots : x_n : x_{n+1})$ в $\widehat{X}$.

Запишем $F(x)$ в виде многочлена от координат:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$$

В качестве искомой квадратичной формы на $\widehat{X}$ возьмём

$$\widehat{F}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i x_{n+1} + c x_{n+1}^2$$

Пусть $\widehat{M}$ — множество нулей $\widehat{F}$. Тогда $\widehat{M} \cap X = M$, так как $F(x_1, \ldots, x_n) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_n, 1)$. $\square$

Комментарии

Замечание

$\widehat{F}$, построенная в доказательстве, не зависит от выбора координат.

Определение

Построенная проективная квадрика $\widehat{M}$ называется проективным пополнением аффинной квадрики M.

Задача

$\widehat{M}$ — замыкание M в топологическом смысле.

Примеры

Рассмотрим «невырожденные» квадрики на плоскости. Координаты на аффинной плоскости обозначаем через (x, y), однородные координаты в $\mathbb{RP}^2$ — через $(x : y : z)$, $\mathbb{RP}^2$ отождествляем с проективным пополнением $\mathbb{R}^2$ стандартным образом.

Парабола $y = kx^2$. Уравнение проективного пополнения: $yz = kx^2$. В нём одна бесконечно удалённая точка $(0 : 1 : 0)$.

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Проективное уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2$. Решая при $z = 0$, получаем две бесконечно удалённые точки $(a : b : 0)$ и $(-a : b : 0)$.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Проективное уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$. При $z = 0$ решение только $x = y = 0$. $\implies$ бесконечно удалённых точек нет.

Содержание

Действие проективных преобразований на квадриках

Далее «квадриками» будет называться проективные квадрики. При упоминании конкретных видов («парабола», «гипербола» и т. п.) подразумеваются их проективные пополнения. Всё происходит в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$.

Теорема

Образ квадрики при проективном преобразовании — тоже квадрика.

Доказательство теоремы

Квадрика $M \subset \mathbb{P}(V)$ порождается множеством нулей квадратичной формы $Q\colon V \to \mathbb{R}$:

$$\widetilde{M} = \{v \in V \setminus \{0\} : Q(v) = 0\}$$

Проективное преобразование $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ порождается линейной биекцией $L\colon V \to V$. Рассмотрим образ $\widetilde{M}$ при L:

$$L(\widetilde{M}) = \{v \in V : L^{-1}(v) \in \widetilde{M}\} = \{v \in V \setminus \{0\} : Q(L^{-1}(v)) = 0\}$$

Это множество нулей функции $Q' = Q \circ L^{-1}$.
Легко проверить, что Q' — квадратичная форма. $\square$

Что такое проективная классификация

Проективная классификация квадрик — перечисление их классов эквивалентности по такому отношению: две квадрики эквивалентны, если одна переводится в другую проективным преобразованием.

Мы будем классифицировать не сами квадрики (множества точек), а их уравнения.

Уравнения квадрик имеют вид $Q(v) = 0$,
где Q — квадратичная форма на V.
Они рассматриваются с точностью до пропорциональности, т.е. Q и λQ, где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, задают одно и то же уравнение.

Квадратичные формы Q_1 и Q_2 проективно эквивалентны, если существуют линейное преобразование $L\colon V \to V$ и константа $\lambda \neq 0$ такие, что $Q_2 = \lambda Q_1 \circ L$.

Диагонализация

Напоминание: для любой квадратичной формы есть базисы, в которых её матрица диагональна. В соответсвующих координатах x_i, квадратичная форма имеет вид $\sum a_i x_i^2$. Ортогональность координат сейчас не нужна.

Примеры на плоскости $\mathbb{R}^2$.

1. Рассмотрим $Q(x, y) = x^2 + 4xy - 3y^2$. Преобразуем:

$$x^2 + 4xy - 3y^2 = 1 \cdot (x + 2y)^2 - 7 \cdot y^2.$$

Числа $x + 2y, y$ — координаты точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в некотором базисе. (Упражнение: найдите этот базис!) Получили диагональную форму с коэффициентами 1 и -7.

2. Рассмотрим $Q(x, y) = xy$. Преобразуем:

$$xy = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2$$

Это диагональная форма с коэффициентами $\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4}$.

Сведение к коэффициентам ± 1 и 0

Растяжение вдоль координаты x_i с коэффициентом λ сохраняет диагональность матрицы и умножает коэффициент на λ^{-2}.

Следствие

Для любой квадратичной формы существует базис, в котором её матрица диагональна и на диагонали стоят только числа ± 1 и 0.

Отсюда следует, что проективных типов квадрик в каждой размерности конечное множество, и тип квадрики определяется количествами положительных и отрицательных элементов в диагональной форме в проективных координатах.

Кроме того, все знаки можно поменять на противоположные. Это соответствует умножению уравнения на -1.

Квадрики в $\mathbb{RP}^2$

Эллипс имеет проективное уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$. Это диагональная форма, в ней два плюса и один минус. Будем обозначать этот тип $(++-)$.

Гипербола имеет проективное уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$. Это тип $(+--)$, умножением на -1 он переводится в $(++-)$.

Парабола имеет проективное уравнение $ax^2 - yz = 0$. Это не диагональная форма. Она диагонализируется с помощью равенства $yz = \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2$. Получается тип $(++-)$.

Остальные аффинные типы квадрик на плоскости задаются проективными уравнениями, у которых в диагональной форме один из коэффициентов равен 0.

Эллипсы, параболы, гиперболы

Следствие

При проективных преобразованиях эллипсы, параболы и гиперболы переходят в эллипсы, параболы и гиперболы.

Любую из этих кривых можно проективным преобразованием перевести в любую другую. Например, в окружность.

В частности, окружность при проективном преобразовании переходит в эллипс, параболу или гиперболу.

Результат зависит от того, сколько точек окружности отправляется на бесконечно удалённую прямую.

Закон инерции квадратичных форм

Теорема

Количество положительных, отрицательных и нулевых слагаемых в диагональной матрице квадратичной формы не зависит от способа диагонализации.

Доказательство закона инерции

Доказываем для количества положительных чисел на диагонали. Пусть $\dim V = n$.

Если в диагональной форме есть k положительных чисел, то соответствующие векторы порождают k-мерное подпространство $W_1 \subset V$, где форма положительно определена.

Предположим, что в другом базисе форма диагональна и положительных коэффициентов меньше k. Тогда остальные дают подпространство $W_2 \subset V$, на котором формы неположительна, и $\dim W_2 \geq n - k + 1$.

Так как $\dim W_1 + \dim W_2 > n$, имеем $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 1$. Выберем ненулевой вектор из пересечения. На нём значение формы одновременно положительно и неположительно. Противоречие. $\square$

Размерность 3 (задачи)

Задача

Распределите квадрики в $\mathbb{R}^3$ по проективным типам.

Задача

Докажите, что при отсутствии нулей в диагональной форме проективная квадрика в $\mathbb{RP}^3$ является компактной поверхностью без края. Определите топологические типы этих поверхностей.