Содержание

Определение

Пусть X — аффинное пространство.

Определение

Множество $A \subset X$ выпуклое, если для любых $x, y \in A$ отрезок $[xy]$ тоже содержится в A. (Определение отрезка — ниже.)

Определение

Пусть $x, y \in X$. Отрезок между точками — это множество

$$[xy] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$$

Другое обозначение: $[x, y]$.

Комментарии к определению отрезка

Замечание

$tx + (1-t)y$ — барицентрическая комбинация x и y. Следовательно, отрезок — множество точек, не зависящее от начала отсчёта.

Замечание

$[xy]$ — образ отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$ при единственном аффинном отображении $f\colon \mathbb{R} \to X$ таком, что $f(0) = x$ и $f(1) = y$. Оно задаётся формулой $f(t) = (1-t)x + ty$.

Примеры и конструкции

- Пустое множество, точка, аффинные подпространства — выпуклые множества.
- Образы и прообразы выпуклых множеств при аффинных отображениях — выпуклы. В частности, отрезки выпуклы.
  - ▷ Это следует из того, что образ отрезка — отрезок. □
- Шары евклидовой метрики выпуклы.
  - ▷ Например, для $B = \overline{B}_1(0)$: $x, y \in B \implies |x|, |y| \le 1 \implies$

$$|tx + (1-t)y| \le |tx| + |(1-t)y| \le t|x| + (1-t)|y| \le 1$$

$$\implies tx + (1-t)y \in B.$$ □

Полупространства

Напоминание: любая гиперплоскость $H \subset X$ имеет вид $f^{-1}(0)$, где $f \colon X \to \mathbb{R}$ — аффинная функция. При этом f определена однозначно с точностью до умножения на константу.

$X \setminus H$ разбивается на два открытых множества:

$$H^+ = f^{-1}((0, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > 0\},$$

$$H^- = f^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in X : f(x) < 0\}$$

Они называются открытыми полупространствами.

H^+ и H^- выпуклы как прообразы выпуклых множеств (лучей) при аффинном отображении.

H^+ и H^- — компоненты связности и линейной связности $X \setminus H$. Любой отрезок (и любой путь) с концами в разных полупространствах пересекает H.

Полупространства — 2

Аналогично определяются замкнутые полупространства

$$\overline{H}^{+} = H^{+} \cup H = f^{-1}([0, +\infty))$$

$$\overline{H}^{-} = H^{-} \cup H = f^{-1}((-\infty, 0])$$

Они тоже выпуклы — как прообразы выпуклых лучей $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$.

Сумма по Минковскому

Пусть V — векторное пространство.

Определение

Пусть $A, B \subset V$. Их **сумма по Минковскому** — множество

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ \ b \in B\}$$

Пример (в $\mathbb{R}^n$)

$A + B_r(0)$ — r-окрестность множества A.

Замечание

При замене начала отсчёта множество $A + B$ изменяется, но отличается от исходного только параллельным переносом.

Выпуклость суммы по Минковскому

Теорема

Если A и B выпуклы, то $A+B$ тоже.

Доказательство.

Рассмотрим произвольные точки из $A+B$:
$c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$.
Для любого $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} tc_1 + (1-t)c_2 = t_1(a_1+b_1) + (1-t)(a_2+b_2) = \\ = (ta_1 + (1-t)a_2) + (tb_1 + (1-t)b_2) \in A+B \end{aligned}$$

$\square$

Конусы

Пусть V — векторное пространство.

Определение

$K \subset V$ — конус (с вершиной в 0), если для любого $v \in K$ и любого $t > 0$, вектор tv тоже принадлежит K.

Краткая запись определения: $tK \subset K$ для любого $t > 0$.

Определение

Коническая оболочка множества $A \subset V$ — множество всех векторов вида tv, где $v \in A$ и $t > 0$.

Ясно, что это наименьший конус, содержащий A.

Выпуклые конусы

Упражнение

Конус $K \subset V$ является выпуклым $\iff$ $K + K = K$.

Упражнение

Если $A \subset V$ — выпуклое множество, то его коническая оболочка тоже выпукла.

Упражнение

Операции выпуклой оболочки и конической оболочки перестановочны.
(Определение выпуклой оболочки — см. далее)

Содержание

Определение

Лемма

Пересечение любого набора выпуклых множеств выпукло.

Доказательство.

Очевидно из определения. □

Определение

Выпуклая оболочка множества $A \subset X$ — пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A (т.е. наименьшее из таких множеств).
Обозначение: $\mathrm{conv}(A)$.

Выпуклые комбинации

Определение

Выпуклая комбинация точек $a_1, \ldots, a_n$ — линейная комбинация $\sum t_i a_i$, где все $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$.

Замечание

Выпуклые комбинации — частный случай барицентрических, поэтому это точки, не зависящие от начала отсчёта.

Замечание

Выпуклая комбинация двух точек — точка на отрезке между ними.

Выпуклые комбинации лежат в выпуклом множестве

Лемма

Если A — выпуклое множество, то оно содержит все выпуклые комбинации своих точек.

Доказательство.

План: индукция по числу слагаемых в выпуклой комбинации. □

Выпуклая оболочка — множество выпуклых комбинаций

Пусть $A \subset X$ — произвольное множество.

Теорема

$\mathrm{conv}(A)$ — *множество всех выпуклых комбинаций точек из A.*

Доказательство.

План: Пусть $B = \mathrm{conv}(A)$, C — множество всех выпуклых комбинаций точек из A. Доказываем два включения: $C \subset B$ и $B \subset C$.

$C \subset B$ следует из леммы, применённой к B.

$B \subset C$: достаточно доказать, что C выпукло, так как B — наименьшее из таких. $\square$

Сумма и выпуклая оболочка

Задача

Для любых множеств $A, B \subset V$

$$\operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B) = \operatorname{conv}(A + B).$$

Содержание

Формулировка

Пусть X — аффинное пространство, $\dim X = n$.

Теорема (Каратеодори)

Пусть $\dim X = n$, $A \subset X$, $p \in \operatorname{conv}(A)$. *Тогда p представима в виде выпуклой комбинации не более $n+1$ точек из A.*

Случаи малых размерностей

Следствие ($n = 1$)

Для множества A на прямой, $\operatorname{conv}(A)$ — объединение всех отрезков с концами в A.

Следствие ($n = 2$)

Для множества $A \subset \mathbb{R}^2$, не содержащегося в одной прямой, $\operatorname{conv}(A)$ — объединение всех треугольников с вершинами в A.

Симплексы

Определение

k-мерный симплекс — выпуклая оболочка $k+1$ аффинно независимых точек.
Эти точки называются вершинами симплекса.

Например, 0-мерный симплекс — точка, 1-мерный симплекс — отрезок, 2-мерный симплекс — треугольник, и т. д.
В n-мерном X нет симплексов размерности больше n.

Следствие

Для любого $A \subset X$, $\operatorname{conv} A$ — объединение всех симплексов с вершинами в A.

Доказательство следствия

Индукция по размерности.

Пусть $p \in A$. По теореме Каратеодори, p равно выпуклой комбинации точек $a_1, \dots, a_{n+1} \in X$.
Значит, $p \in \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_{n+1}\} =: \Delta$.

Если $a_1, \dots, a_{n+1}$ аффинно независимы, то Δ — симплекс.

Если нет, то $a_1, \dots, a_{n+1}$ лежат в подпространстве меньшей размерности. Применим в этом подпространстве индукционное предположение. $\square$

Доказательство теоремы Каратеодори

Так как $p \in \operatorname{conv}(A)$, p представимо в виде выпуклой комбинации точек из A. Выберем такую комбинацию с минимальным числом слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = p, \qquad a_i \in A,\ \lambda_i > 0,\ \sum \lambda_i = 1. \tag{1}$$

Предположим, что $m \geq n+2$. Тогда $\{a_i\}$ аффинно зависимы:

$$\sum \mu_i a_i = 0, \qquad \mu_i \in \mathbb{R},\ \text{не все нули}, \sum \mu_i = 0 \tag{2}$$

Вычтем из (1) (2), умноженное на правильно выбранное $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum (\lambda_i - t\mu_i) a_i = p \tag{3}$$

Доказательство теоремы Каратеодори — 2

(Повтор формулы)

$$\sum(\lambda_i - t\mu_i)a_i = p \tag{3}$$

Число t подберём так, что один из коэффициентов $\lambda_i - t\mu_i$ обратится в 0, а остальные останутся неотрицательными.

Подходит $t = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0\right\}$.

Нулевое слагаемое в (3) можно вычеркнуть. Получилась новая выпуклая комбинация с меньшим числом слагаемых.

Противоречие с минимальностью m
$\implies$ предположение $m \geq n+2$ неверно
$\implies$ $m \leq n+1$. $\square$

Выпуклая оболочка компакта

Теорема

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то $\operatorname{conv}(A)$ тоже компактно.

Доказательство.

Определим множество $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta = \left\{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{все } t_i \geq 0 \text{ и } \sum t_i = 1\right\}$$

и $F \colon A^{n+1} \times \Delta \to \mathbb{R}^n$

$$F(a_1, \dots, a_{n+1}, t_1, \dots, t_{n+1}) = \sum t_i a_i.$$

По теореме Каратеодори, $\operatorname{conv}(A)$ — множество значений F. $A^{n+1} \times \Delta$, F непрерывно $\implies$ множество значений компактно. □

Комментарии: замкнутость и ограниченность

Теорему не получится легко доказать, пользуясь тем, что компактность равносильна замкнутости и ограниченности.

- Выпуклая оболочка ограниченного множества ограничена. (Это следует из того, что шары выпуклы.)
- Но: Выпуклая оболочка замкнутого множества не всегда замкнута.

Теорема Каратеодори для конусов

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$.

Задача

Если $K \subset V$ — конус, то любой вектор $v \in \operatorname{conv}(K)$ представляется в виде суммы не более n векторов из K.