# Содержание

## Формулировка

Пусть $X$ — аффинное пространство, $\dim X = n$.

**Теорема (Радон)**

*Пусть $M \subset X$, $|M| \geq n+2$. Тогда $M$ можно разбить на два подмножества $A$ и $B$ (т.е. $A \cup B = M$ и $A \cap B = \emptyset$) такие, что*

$$\mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B) \neq \emptyset$$

## Теорема Радона в малых размерностях

Для понимания формулировки рассмотрим случай $|M| = n + 2$ в малых размерностях.

- $n = 1$. На прямой формулировка теоремы Радона означает, что из любых 3 точек одна лежит между двумя другими.
- $n = 2$. Есть два случая расположения 4 точек (в общем положении): либо это три вершины треугольника и точка внутри него, либо это вершины выпуклого 4-угольника. В первом случае $A$ — вершины треугольника, $B$ — одна точка, которая лежит внутри. Во втором случае $A$ — одна пара противоположных вершин, $B$ — другая, а утверждение сводится к тому, что диагонали выпуклого 4-угольника пересекаются.

# Доказательство теоремы Радона

Сначала докажем теорему для случая, когда $m := |M|$ — не бесконечность.

Пусть $M = \{p_1, \dots, p_m\}$. Так как $m \geq n+2$, между точками есть аффинная зависимость:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i p_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} t_i = 0, \qquad t_i \text{ не все равны } 0$$

Пусть $I$ — множество тех индексов $i$, для которых $t_i > 0$,
$J$ — множество остальных индексов.
Перенесём отрицательные коэффициенты в правую часть:

(продолжение следует)

# Доказательство теоремы Радона — 2

Из формулы $\sum t_i p_i = 0$ получается:

$$\sum_{i \in I} t_i p_i = \sum_{j \in J} (-t_j) p_j \tag{1}$$

Из формулы $\sum t_i = 0$ получается:

$$\sum_{i \in I} t_i = \sum_{j \in J} (-t_j) \tag{2}$$

Умножим все коэффициенты $t_1, \ldots, t_m$ на такую константу, что обе суммы в (1) станут равны 1. Новые коэффициенты обозначаем так же: $t_1, \ldots, t_m$, формула (1) остаётся верной.

Теперь в (1) слева и справа стоят выпуклые комбинации точек $\{p_i\}$ и $\{p_j\}$. Значение сумм в (1) — некоторая точка $p \in X$.

(продолжение следует)

# Доказательство теоремы Радона — 3

Еще раз формула (1):

$$p = \sum_{i \in I} t_i p_i = \sum_{j \in J} (-t_j) p_j \tag{3}$$

Теперь положим $A = \{p_i : i \in I\}$ и $B = \{p_j : j \in J\}$.

Из (3) следует, что $p$ лежит и в $\operatorname{conv}(A)$, и в $\operatorname{conv}(B)$.
$\implies \operatorname{conv}(A) \cap \operatorname{conv}(B) \neq \emptyset$.
ч.т.д.

Осталось разобрать случай $m = \infty$. Он сводится к разобранному:
Выберем $M' \subset M$ с $|M'| = n + 2$, разобьём его на $A$ и $B$ как выше, потом добавим точки $M \setminus M'$ в $A$ и $B$ как угодно (например, все в $A$). $\square$

# Содержание

# Формулировка

Пусть $X$ — аффинное пространство, $\dim X = n$.

**Теорема (Хелли)**

*Пусть* $C_1, \dots, C_m \subset X$ *— выпуклые множества,* $m \geq n+1$*, и любые* $n+1$ *из этих множеств имеют непустое пересечение. Тогда пересечение всех* $C_i$ *непусто.*

# Комментарии

- Случай $n = 1$: На прямой дан конечный набор интервалов, любые два из которых имеют общую точку. Тогда у всех есть общая точка.
- Случай $n = 2$: На плоскости дан конечный набор выпуклых множеств, любые три из которых имеют непустое пересечение. Тогда пересечение всех непусто.

  Замечание: На плоскости пересечений по 2 недостаточно.

  Замечание: Выпуклость существенна.

# Доказательство теоремы Хелли — 1

Индукция по $m$. База $m = n+1$ очевидна.

Переход: $m-1 \to m$, где $m \geq n+2$.
По индукционному предположению, для каждого $k$ есть непустое пересечение всех множеств $C_i$, кроме $C_k$.
Выберем в этом пересечении точку $p_k$.

Так как $m \geq n+2$, применим к $M = \{p_1, \dots, p_m\}$ теорему Радона (пока считаем, что все $p_k$ различны).

Получим разбиение $M = A \sqcup B$, где $\operatorname{conv}(A) \cap \operatorname{conv}(B) \neq \emptyset$.

Выберем $p \in \operatorname{conv}(A) \cap \operatorname{conv}(B)$.
Докажем, что $p$ принадлежит всем $C_i$.

# Доказательство теоремы Хелли — 2

Пусть $C_k$ — любое из наших множеств. Почему $p$ принадлежит этому $C_k$?

Рассмотрим, в какое из множеств $A$ и $B$ попала точка $p_k$. Пусть $p_k \in A$ (случай $p_k = B$ симметричен).

Тогда $B \subset C_k$ (по построению)
$\implies$ conv$(B) \subset C_k$
$\implies$ $p \in C_k$ (так как $p \in \text{conv}(B)$).
Так как $k$ произвольно, $p$ принадлежит всем $C_i$ $\implies$ она принадлежит их пересечению $\implies$ пересечение непусто.

Случай, когда среди $p_k$ есть сопадающие:
Пусть $p_k = p_j$ для некоторых $k \neq j$. Тогда эта точка $p := p_k = p_j$ принадлежит всем множествам $C_i$. □

# Теорема Хелли для бесконечного набора компактов

**Теорема**

*Пусть* $\{C_i\}_{i \in I}$ *— набор выпуклых компактов в* $X$, $\dim X = n$, $|I| \geq n+1$, *и любые* $n+1$ *из множеств* $C_i$ *имеют непустое пересечение. Тогда* $\bigcap C_i \neq \emptyset$.

**Замечание**

Без компактности теорема неверна. Например, пусть $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}$, $C_i = [i, +\infty)$.

# Доказательство

Из обычной теоремы Хелли следует, что $\{C_i\}$ — центрированное семейство компактов (любой конечный набор имеет непустое пересечение).

Из общей топологии, центрированное семейство компактов в хаусдорфовом пространстве имеет непустое пересечение. □

Напоминание фактов из общей топологии:

- Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут
- В компактном пространстве любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение

Из них следует:

- В любом топологическом пространстве любое центрированное семейство замкнутых множеств, хотя бы одно из которых компактно, имеет непустое пересечение.

# Приложение: теорема Юнга

**Теорема**

*Пусть* $M \subset \mathbb{R}^2$, $\operatorname{diam}(M) \leq 1$. *Тогда* $M$ *содержится в некотором замкнутом круге радиуса* $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Замечание**

$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — это радиус описанной окружности правильного треугольника со стороной 1.

**Замечание**

Теорема верна и в старших размерностях (с аналогичным значением $R$). Доказываем только в размерности 2.

# Доказательство теоремы Юнга

Переформулируем утверждение теоремы:

$M$ лежит в замкнутом круге радиуса $R$

$\iff \exists p \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in M \quad x \in \overline{B}_R(p)$ ($p$ — центр круга)

$\iff \exists p \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in M \quad d(p, x) \leq R$

$\iff \exists p \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in M \quad p \in \overline{B}_R(x)$

$\iff$ пересечение всех кругов $\overline{B}_R(x)$, где $x \in M$, непусто.

По теореме Хелли для компактов достаточно доказать последнее свойство для троек точек:
$\forall a, b, c \in M$ верно, что $\overline{B}_R(a) \cap \overline{B}_R(b) \cap \overline{B}_R(c) \neq \emptyset$.

Мы свели теорему к случаю, когда $|M| = 3$

Этот случай — элементарная планиметрия.

# Содержание

# Формулировка

**Теорема**

*Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт,* $\operatorname{Int} A \neq \emptyset$. *Тогда* $A$ *гомеоморфно* $D^n$ *(т.е. замкнутому шару).*

**Замечание**

Непустая внутренность существенна. Например, рассмотрим на плоскости точки и отрезки.

**Определение**

Выпуклые компакты с непустой внутренностью называются **выпуклыми телами**.
На плоскости они также называются **выпуклыми фигурами**.

# План доказательства

Так как $\operatorname{Int} A \neq \emptyset$, будем считать, что $0 \in \operatorname{Int} A$.

Для каждого единичного вектора $v$ определим число $\ell(v)$:

$$\ell(v) = \max\{t > 0 : tv \in A\}$$

(Это длина пересечения $A$ и луча, порождённого $v$.)

Получили функцию $\ell \colon \mathbb{S}^{n-1} \to (0, +\infty)$. Она непрерывна (техническая проверка).

Растянем каждый луч из в $\ell(v)^{-1}$ раз, где $v$ — единичный вектор на этом луче. Получим отображение $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $f(x) = \ell\left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} x$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Это гомеоморфизм (техническая проверка). Он переводит $A$ в шар $D^n = \overline{B}_1(0)$. □

# Комментарии

**Замечание**

При построенном гомеоморфизме внутренность $A$ переходит в открытый шар $B_1(0)$, а границу $A$ — в сферу.
Это станет очевидным позже.

**Задача**

Непустое открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно открытому шару.