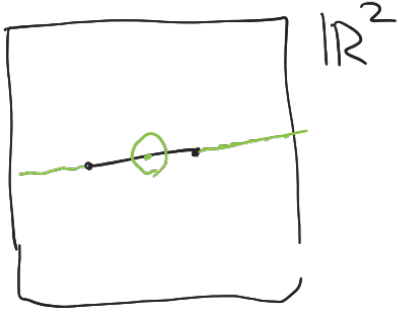
Содержание

Прошлый раз:

Теорема $A \subset \mathbb{R}^n$ вып, комп, $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

$\Rightarrow A \simeq D^n$



Определение

Определение

Размерностью непустого выпуклого множества A называется размерность его аффинной оболочки: $\dim(A) = \dim \mathrm{Aff}(A)$.

Опр A вып, $A \subset \mathbb{R}^n$

$\dim(A) = \dim \mathrm{Aff}(A)$.

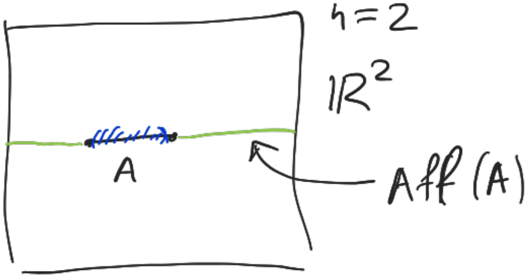
Определение

Относительная внутренность выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — его внутренность в относительной топологии его аффинной оболочки $\mathrm{Aff}(A)$.
Обозначение: $\mathrm{RelInt}(A)$.

Опр. $\mathrm{RelInt}(A) = \mathrm{Int}_{\mathrm{Aff}(A)}(A)$

Пример

Отрезок на плоскости имеет пустую внутренность, но его относительная внутренность — тот же отрезок без концов.



Относительная внутренность непуста

Теорема

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — непустое выпуклое множество, то $\mathrm{RelInt}(A) \neq \emptyset$.

Следствие

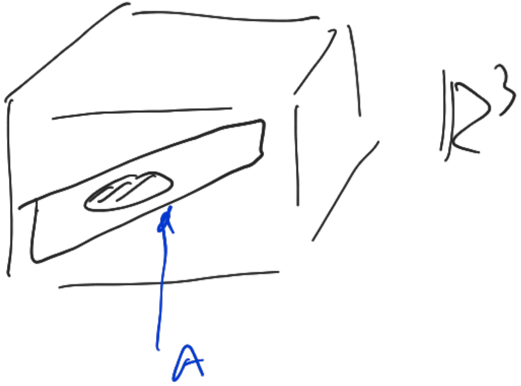
Любой непустой выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфен D^k, *где* $k = \dim(A)$.

Теорема $A \subset \mathbb{R}^n$ вып, $\neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathrm{Rel\,Int}\, A \neq \emptyset$

Сл $A \subset \mathbb{R}^n$ – вып, комп

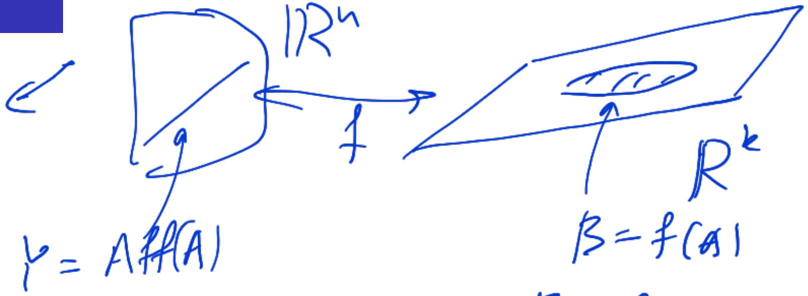
$\neq \emptyset$, $\Rightarrow A \simeq D^k$



Доказательство теоремы — 1

Пусть $Y = \mathrm{Aff}(A)$, $\dim Y = k$. Существует аффинная биекция $f\colon Y \to \mathbb{R}^k$, она — гомеоморфизм.

$\Longrightarrow$ достаточно доказать, что $B := f(A) \subset \mathbb{R}^k$ имеет непустую внутренность. При этом $\mathrm{Aff}(B) = \mathbb{R}^k$.



Дано: $B < \mathbb{R}^k$, вып.,

$\mathrm{Aff} = \mathbb{R}^k$

Надо: $\mathrm{Int}(B) \neq \varnothing$.

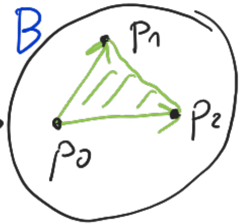
Доказательство теоремы — 1

Пусть $Y = \mathrm{Aff}(A)$, $\dim Y = k$. Существует аффинная биекция $f\colon Y \to \mathbb{R}^k$, она — гомеоморфизм.

$\implies$ достаточно доказать, что $B := f(A) \subset \mathbb{R}^k$ имеет непустую внутренность. При этом $\mathrm{Aff}(B) = \mathbb{R}^k$.

$B \subset \mathbb{R}^k$, $\mathrm{Aff}(B) = \mathbb{R}^k$ $\Rightarrow$ $\exists\ p_0, \ldots, p_k \in B$ афф. незав.

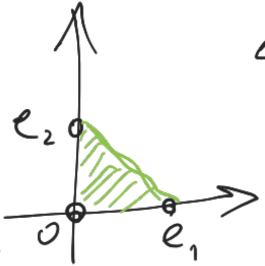
В множестве B найдутся $k+1$ аффинно независимых точек (это следует из линейной алгебры). Их выпуклая оболочка — k-мерный симплекс. Осталось доказать, что внутренность k-мерного симплекса в $\mathbb{R}^k$ непуста.



$p_0 = 0$
$\mathrm{Aff}(B) = \mathrm{Lin}(B)$

Все k-симплексы аффинно эквивалентны $\implies$ достаточно доказать для стандартного симплекса $\Delta := \mathrm{conv}\{0, e_1, \ldots, e_k\}$.

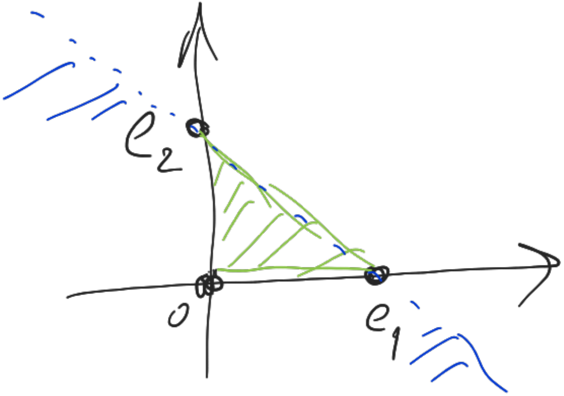
Дост. д-ть, что $\mathrm{Int\,conv}(0, e_1, \ldots, e_k) \neq \varnothing$.



$\left.p_0, \ldots, p_k \in B \atop B - \text{вып}\right\} \Rightarrow$ $\mathrm{conv}(p_0, \ldots, p_k) \subset B$

Почему у стандартного симплекса непустая внутренность

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_k\} \\
&= \{\text{выпуклые комбинации } 0, e_1, \dots, e_k\} \\
&= \{t_0 \cdot 0 + t_1 e_1 + \dots + t_k e_k : t_i \geq 0, \textstyle\sum t_i = 1\} \\
&= \{x_1 e_1 + \dots + x_k e_k : x_i \geq 0, \textstyle\sum x_i \leq 1\} \\
&= \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \geq 0, \textstyle\sum x_i \leq 1\}
\end{aligned}
$$



Он содержит открытое множество

$$\Delta' = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i > 0, \textstyle\sum x_i < 1\}$$

$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$

$x \geq 0$ — вер. полупл

$y \geq 0$ — правая

$\boxed{x + y \leq 1}$

Оно непусто $\implies$ $\mathrm{Int}\,\Delta \neq \emptyset$.

Теорема доказана. $\square$

$\Delta' \subset \Delta$

$\Delta' \neq \emptyset$

$\Delta' \ni \left(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}\right)$

Содержание

Внутренность выпуклого множества выпукла

Теорема

Внутренность выпуклого множества выпукла.

Следствие

Относительная внутренность выпуклого множества выпукла.

Теорема

A - вып

$\Rightarrow$ Int (A) вып

Rel Int (A) вып

Доказательство.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $p, q \in \operatorname{Int}(A)$. Докажем, что $[pq] \subset \operatorname{Int}(A)$.

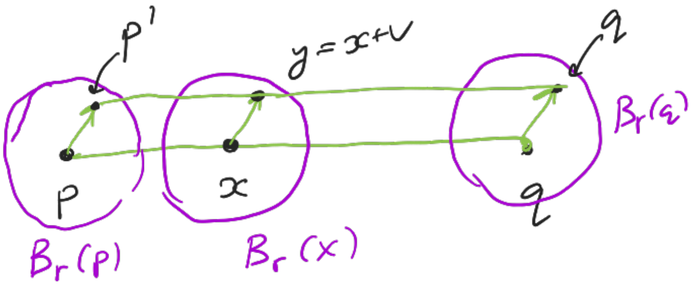
Пусть $x \in [pq]$, $x = tp + (1-t)q$, $t \in [0,1]$. Докажем, что $x \in \operatorname{Int}(A)$.

$p, q \in \operatorname{Int}(A) \implies \exists r > 0 : B_r(p), B_r(q) \subset A$. Докажем, что $B_r(x) \subset A$.

Пусть $y \in B_r(x)$. Тогда $y = x + v$, где $|v| < r$.

Точки $p + v$, $q + v$ принадлежат A, так как $B_r(p), B_r(q) \subset A$.

$\implies t(p+v) + (1-t)(q+v) = x + v \in A$. $\square$



$$p' = p + v$$
$$q' = q + v.$$
$$x \overset{?}{=} tp' + (1-t)q' =$$
$$= tp + tv + tq + (1-t)v$$
$$= \underbrace{tp + (1-t)q}_{\substack{\parallel \\ x}} + v = x + v$$

Замыкание выпуклого множества выпукло

Теорема

Замыкание выпуклого множества выпукло.

A - вып $\Rightarrow$ $Cl(A)$ вып.

Отн. замыкание - не нужно

$$Cl_{Aff(A)} A = Cl(A)$$

Доказательство теоремы

Доказательство.

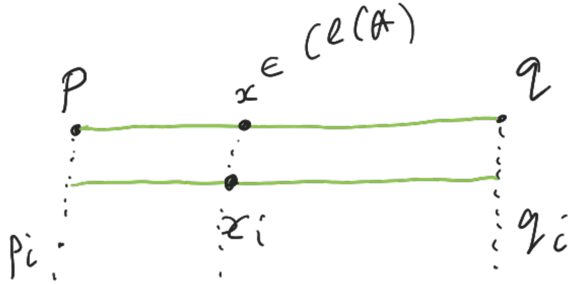
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $p, q \in \mathrm{Cl}(A)$. Докажем, что $[pq] \subset \mathrm{Cl}(A)$.

Пусть $x \in [pq]$, $x = tp + (1-t)q$, $t \in [0,1]$. Докажем, что $x \in \mathrm{Cl}(A)$.

$p, q \in \mathrm{Int}(A) \implies p = \lim p_i$, $q = \lim q_i$, где $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ — последовательности, лежащие в A.

Рассмотрим $\underline{x_i = tp_i + (1-t)q_i}$. По выпуклости, $x_i \in A$.

При этом $x_i \to tp + (1-t)q = x \implies x \in \mathrm{Cl}(A)$. $\square$



$$x_i = tp_i + (1-t)q_i$$

$$\downarrow \qquad \downarrow p \qquad \downarrow q$$

$$tp + (1-t)q = x$$

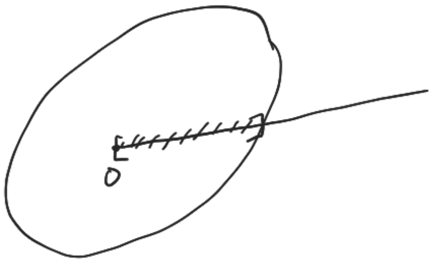
$p, q \in Cl(A)$

? $[pq] \subset Cl(A)$

$p_i, q_i \in A$

$p_i \to p$, $q_i \to q$

Содержание



Пересечение луча с границей множества

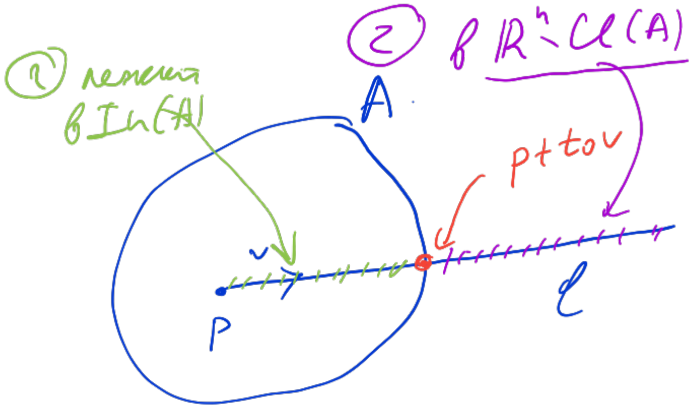
Теорема

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, $p \in \operatorname{Int}(A)$, ℓ — луч с началом в p, $\ell = \{p + tv : t \geq 0\}$, где $v \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$t_0 = \sup\{t > 0 : p + tv \in A\}$$

(возможно, $t_0 = \infty$). Тогда

1. $p + tv \in \operatorname{Int}(A)$ *при всех* $t \in [0, t_0)$;
2. $p + tv \notin \operatorname{Cl}(A)$ *при всех* $t > t_0$.

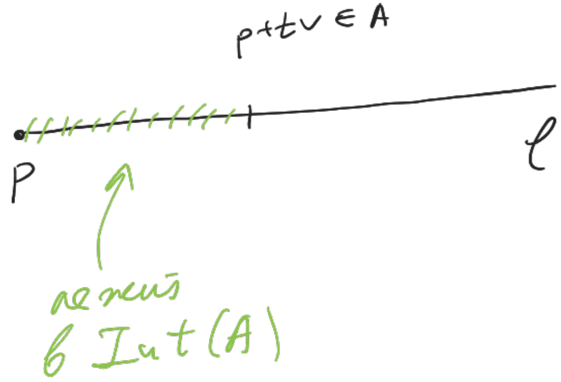


$$\ell = \{p + tv : t \geq 0\}$$

Доказательство — 1

Лемма (Лемма 1)

Если $t > 0$ *и* $p + tv \in A$, *то* $p + t'v \in \operatorname{Int} A$ *для всех* $t' \in (0, t)$.



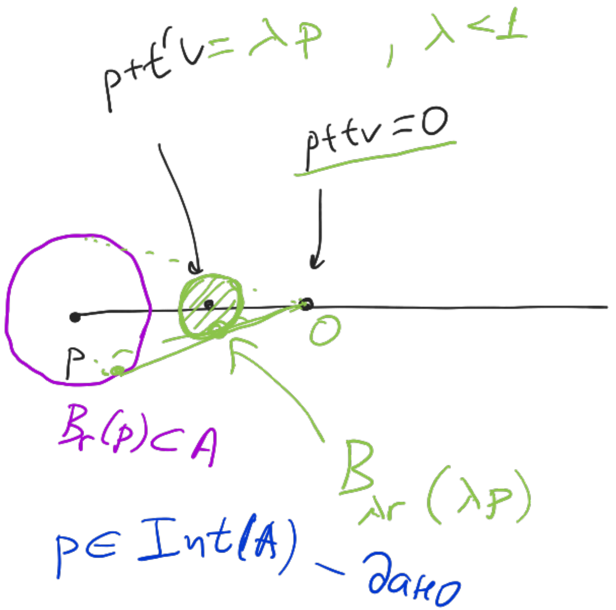
Доказательство — 1

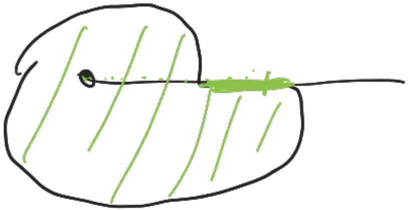
Лемма (Лемма 1)

Если $t > 0$ и $p + tv \in A$, то $p + t'v \in \operatorname{Int} A$ для всех $t' \in (0, t)$.

Доказательство.

Поместим начало отсчёта в $p + tv$.
Пусть $t' \in (0, t)$, тогда $p + t'v = \lambda p$, где $\lambda \in (0, 1)$.
A выпукло, содержит шар $B_r(p)$ и точку 0
$\implies$ A содержит шар $B_{\lambda r}(\lambda p)$ $\implies$ $\lambda p \in \operatorname{Int}(A)$. $\square$

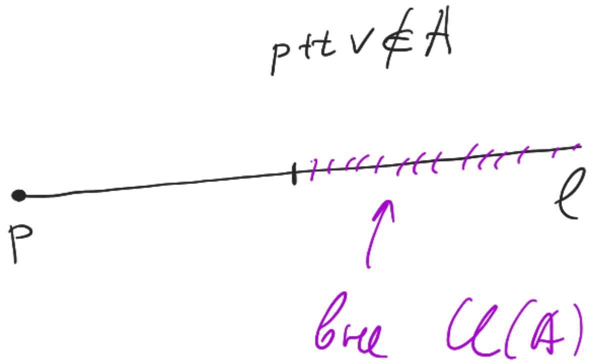




Доказательство — 2

Лемма (Лемма 2)

Если $t > 0$ и $p + tv \notin A$, то $p + t'v \notin \operatorname{Cl} A$ для всех $t' > t$.



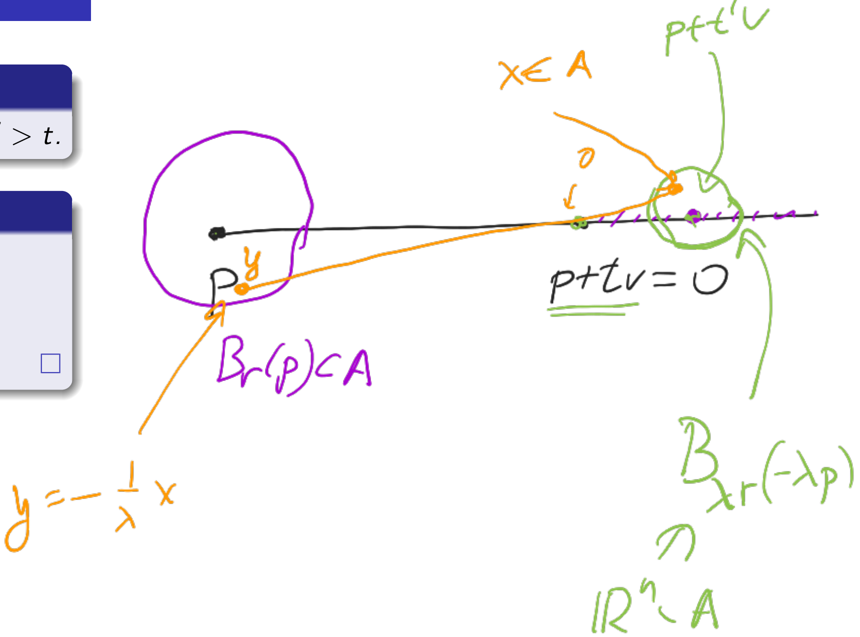
Доказательство — 2

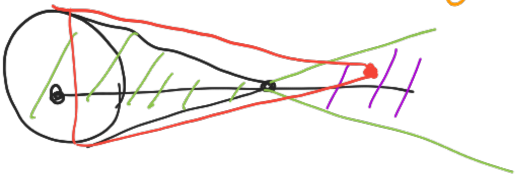
Лемма (Лемма 2)

Если $t > 0$ и $p + tv \notin A$, то $p + t'v \notin \mathrm{Cl}\, A$ для всех $t' > t$.

Доказательство.

Поместим начало отсчёта в $p + tv$.
Пусть $t' > t$, тогда $p + t'v = -\lambda p$, где $\lambda > 0$.
A выпукло, содержит шар $B_r(p)$, не содержит 0
$\implies B_{\lambda r}(-\lambda p) \subset \mathbb{R}^n \setminus A \implies -\lambda p \notin \mathrm{Cl}(A)$. $\square$

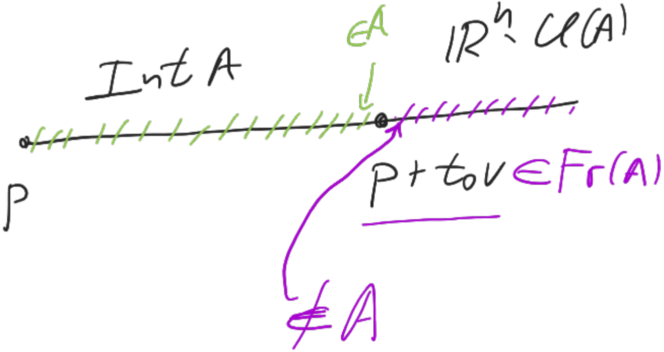




Доказательство — 3

Доказательство теоремы.

Тривиально следует из лемм. ☐



Внутренность замыкания и замыкание внутренности

Следствие

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ *выпукло,* $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$. *Тогда*

1. $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(A)$
2. $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(A)$
3. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}\,\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Fr}\,\mathrm{Cl}(A)$

Для невыпуклых неверно

Внутренность замыкания и замыкание внутренности

Следствие

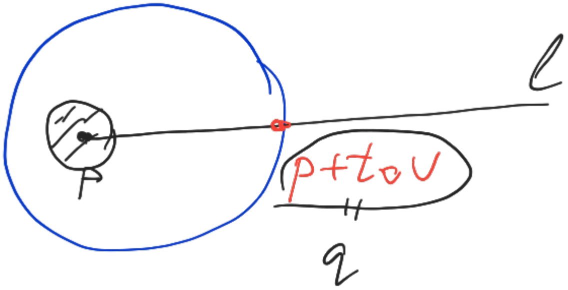
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ *выпукло,* $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$. *Тогда*

1. $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(A)$
2. $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(A)$
3. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}\,\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Fr}\,\mathrm{Cl}(A)$

Доказательство.

Выберем $p \in \mathrm{Int}(A)$. Достаточно доказать утверждения в пересечении с каждым лучом, выходящим из p. Для лучей это следует из теоремы. □

$$\mathrm{Fr} = \mathrm{Cl} \setminus \mathrm{Int}$$



$$l \cap \mathrm{Int}(A) = [pq)$$

$$l \cap \mathrm{Cl}(A) = [pq]$$

$$l \cap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(A) = [pq)$$

$$l \cap \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}(A) = [pq]$$

То же для относительной внутренности

Следствие

Для любого выпуклого $A \subset \mathbb{R}^n$,

1. $\operatorname{RelInt} \operatorname{Cl}(A) = \operatorname{RelInt}(A)$
2. $\operatorname{Cl} \operatorname{RelInt}(A) = \operatorname{Cl}(A)$

Содержание

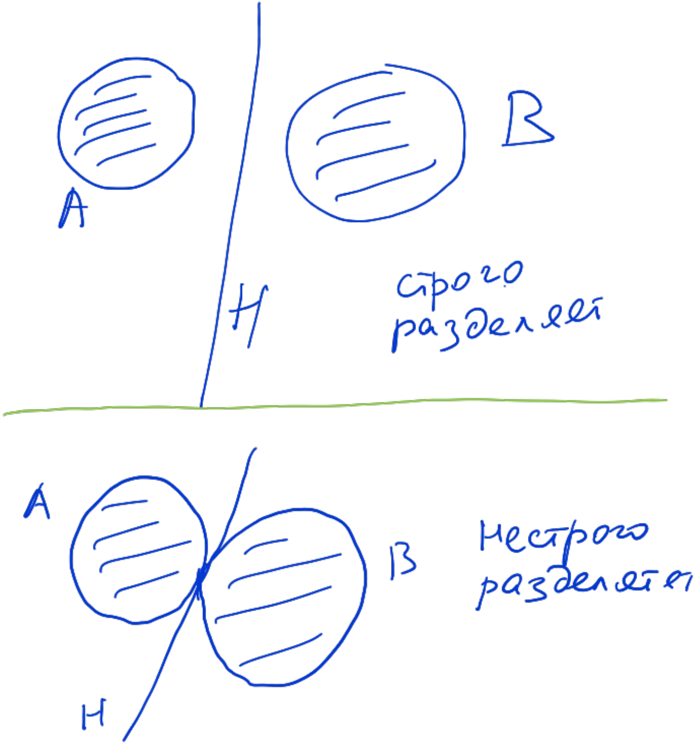
Определения

Определение

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые множества, H — гиперплоскость.

H строго разделяет A и B (строго отделяет A от B), если A и B лежат в разных открытых полуплоскостях относительно H.

H нестрого разделяет A и B (нестрого отделяет A от B), если A и B лежат в разных замкнутых полуплоскостях относительно H.

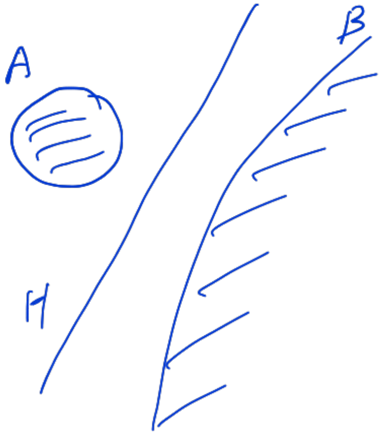


Содержание

Формулировка

Теорема

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые замкнутые выпуклые, хотя бы одно из них компактно, $A \cap B = \emptyset$.
Тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая A и B.



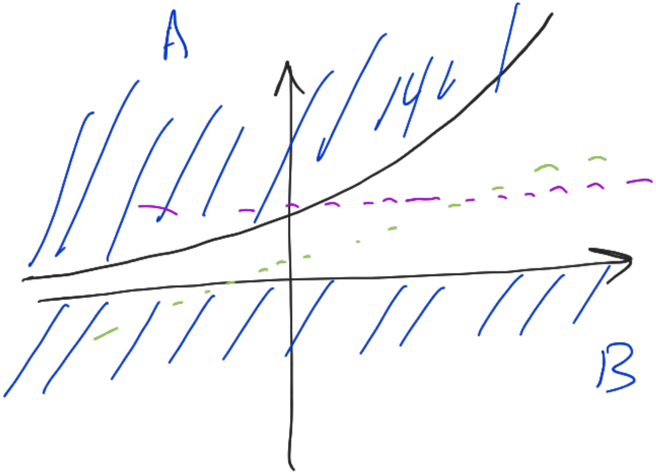
Формулировка

Теорема

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые замкнутые выпуклые, хотя бы одно из них компактно, $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая A и B.

Замечание

Без предположения о компактности это неверно.
Пример: $n = 2$, A — надграфик экспоненты, B — нижняя полуплоскость.

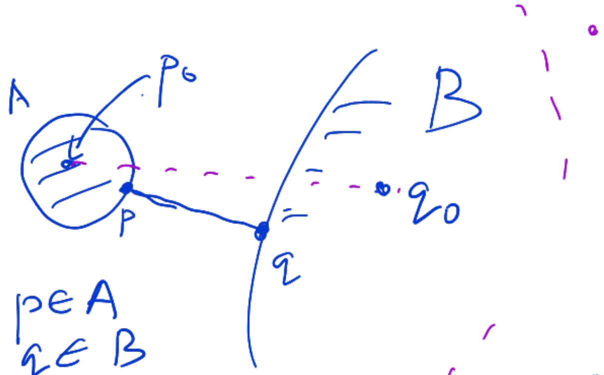


Доказательство — 1: существование ближайших точек

Лемма

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ непусты, A замкнуто, B компактно. Тогда расстояние между A и B реализуется: множество $\{|x-y| : x \in A, y \in B\}$, имеет минимум.

Доказательство: общая топология.



$\exists\ p \in A$, $q \in B$

$|p-q| = \min\{|x-y| : x \in A,\ y \in B\}$

1) Если A, B – комп.

$d|_{\underbrace{A \times B}_{\uparrow \text{комп}}}$ – достигает min (т. Вейерштрасса)

2) B – не комп. $B \to B' = B \cap B_R(p_0)$ $\quad q_0 \in B$

$p_0 \in A$, R – очень большое. $R > \operatorname{diam} A + |p_0 - q_0|$

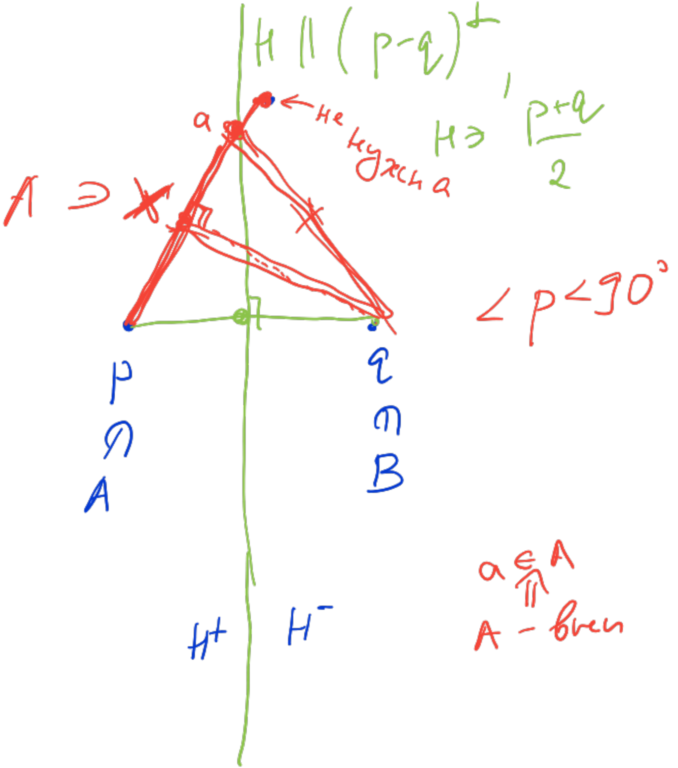
Доказательство — 2

Доказательство теоремы.

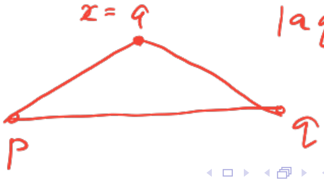
Пусть расстояние от A до B реализуется на точках $p \in A$ и $q \in B$.

Пусть H — гиперплоскость, ортогональная отрезку $[pq]$ и проходящая через его середину. Докажем, что она разделяет A и B. Пусть $p \in H^+$ и $q \in H^-$. Тогда докажем, что $A \subset H^+$ и $B \subset H^-$.

От противного: пусть, например, $A \setminus H^+ \neq \emptyset$. Тогда $\exists a \in A \cap H$.
Из выпуклости, $[ap] \subset A$. Так как a лежит на серединном перпендикуляре к $[pq]$, на $[ap]$ найдется точка x, для которой $|x-q| < |p-q|$. Противоречие с минимальностью $|p-q|$. $\square$



$a \in A$ $\Uparrow$ A − вып



$|aq| < |pq|$ при $\angle a > 90°$