Содержание

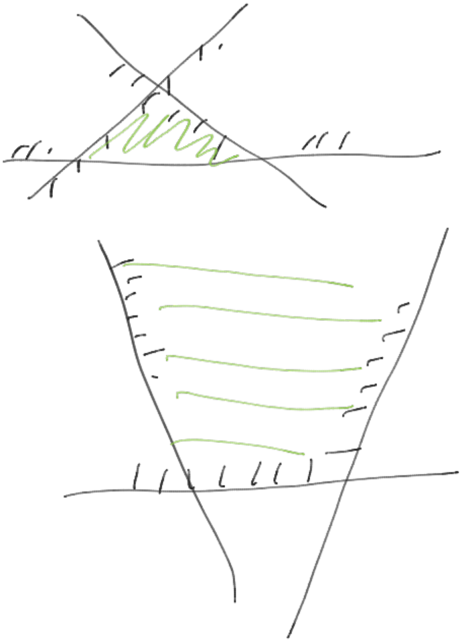
Полиэдральные множества

Определение

Выпуклое полиэдральное множество в $\mathbb{R}^n$ — пересечение конечного набора замкнутых полупространств.

Далее слово «выпуклое» будем пропускать и писать просто «полиэдральное множество».

Примеры:



Полиэдральные множества

Определение

Выпуклое полиэдральное множество в $\mathbb{R}^n$ — пересечение конечного набора замкнутых полупространств.

Далее слово «выпуклое» будем пропускать и писать просто «полиэдральное множество».

Замечание

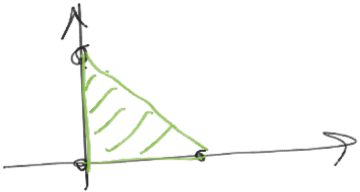
Пересечение замкнутых полупространств — то же самое, что решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} L_1(x) \geq c_1 \\ \dots \\ L_m(x) \geq c_m \end{cases}$$

где $L_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейные функции, $c_i \in \mathbb{R}$.

Полупр-во:

$\{x \in \mathbb{R}^n ; \ L(x) \geq c\}.$



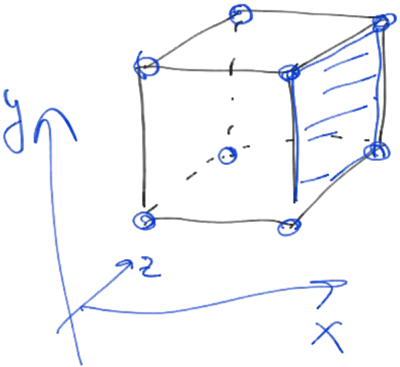
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -(x+y) \geq 1 \end{cases}$$

Теорема Вейля-Минковского

Теорема

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Тогда два условия эквивалентны

1. M — *ограниченное полиэдральное множество.*
2. M — *выпуклая оболочка конечного множества точек.*



Пример:

куб $[-1,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ y \leq 1 \\ y \geq -1 \\ z \leq 1 \\ z \geq -1 \end{cases} = \operatorname{conv}\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$$

Теорема Вейля-Минковского

Теорема

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Тогда два условия эквивалентны

1. *M — ограниченное полиэдральное множество.*
2. *M — выпуклая оболочка конечного множества точек.*

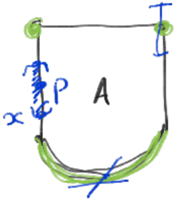
Доказательство будет не сразу.
Сначала будет доказана импликация $1 \implies 2$ (с помощью экстремальных точек).
Потом импликация $2 \implies 1$ (с помощью поляры).

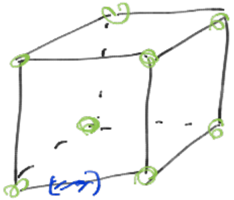
Содержание

Определение экстремальной точки

Определение

Пусть A — замкнутое выпуклое множество, $p \in A$.
p — **экстремальная точка** A, если $A \setminus \{p\}$ — выпуклое множество.
Для полиэдральных множеств экстремальные точки называются **вершинами**.





p - не экстр. $\iff \exists\, x, y \in A \setminus \{p\}:$
$[xy] \not\subset A \setminus \{p\}$. $(*)$

т.к $[xy] \subset A$

$(*) \iff p \in [xy]$

Переформулировка

p — не экстремальная $\iff \exists x, y \in A \setminus \{p\}\colon p \in [xy]$

АлН

Содержание

Формулировка

Обозначение

ex(A) — множество всех экстремальных точек множества A.

Теорема

Для любого выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$

$$A = \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A)).$$

Другими словами, любой выпуклый компакт — выпуклая оболочка своих экстремальных точек.

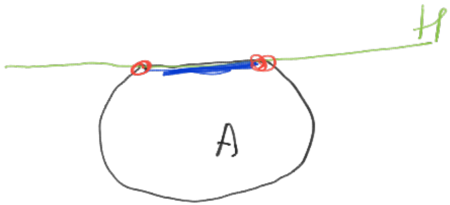
$ex(A) = \{$ экстр. точки $A \}$.

$\underline{T}$. A - вып. комп
$\Rightarrow A = \mathrm{conv}(ex A)$

Доказательство — 1: экстремальные точки в опорных гиперплоскостях

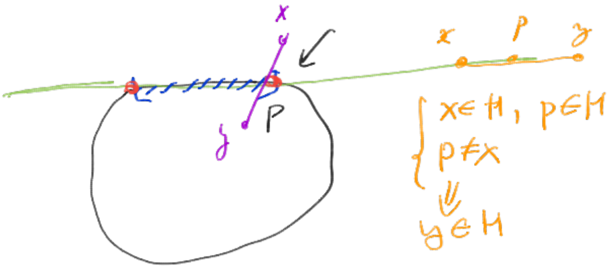
Лемма

Пусть A — замкнутое выпуклое, H — опорная гиперплоскость для A. Тогда $\mathrm{ex}(A \cap H) \subset \mathrm{ex}(A)$.



$$p \in \mathrm{ex}(A \cap H) \Rightarrow p \in \mathrm{ex}(A)$$

Доказательство — 1: экстремальные точки в опорных гиперплоскостях



$$\begin{cases} x \in H,\ p \in H,\ p \in [xy] \\ p \neq x \end{cases} \Downarrow \ y \in H$$

Лемма

Пусть A — замкнутое выпуклое, H — опорная гиперплоскость для A. Тогда $\operatorname{ex}(A \cap H) \subset \operatorname{ex}(A)$.

$$p \in \operatorname{ex}(A \cap H) \setminus \underbrace{\operatorname{ex}(A)}$$

Доказательство.

От противного, пусть $p \in \operatorname{ex}(A \cap H)$, но $p \notin \operatorname{ex}(A)$.
$p \notin \operatorname{ex}(A) \implies \exists x, y \in A \setminus \{p\} : p \in [xy]$.

$$\exists x, y \in A \setminus \{p\} : \boxed{p \in [xy]}$$

Если $x, y \in H$, то $x, y \in (A \cap H) \setminus \{p\} \implies$ $p \notin \operatorname{ex}(A \cap H)$, противоречие.

(1) $x, y \in H$

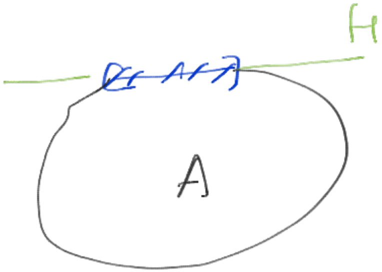
(2) x и y — строго по разные стороны от H.

Иначе x и y лежат по разные стороны от $H \implies$ одна из них не принадлежит $A \implies$ противоречие. □

(1) $x, y \in H \Rightarrow \boxed{x, y \in (A \cap H) \setminus \{p\}}$
$\Rightarrow p \notin \operatorname{ex}(A \cap H)$.

(2) $A \in \overline{H}^+$, x(или y) $\in H^- \Rightarrow x \notin A$ X

Доказательство — 1: экстремальные точки в опорных гиперплоскостях



Лемма

Пусть A — замкнутое выпуклое, H — опорная гиперплоскость для A. Тогда $\mathrm{ex}(A \cap H) \subset \mathrm{ex}(A)$.

Доказательство.

От противного, пусть $p \in \mathrm{ex}(A \cap H)$, но $p \notin \mathrm{ex}(A)$.
$p \notin \mathrm{ex}(A) \implies \exists x, y \in A \setminus \{p\} : p \in [xy]$.

Если $x, y \in H$, то $x, y \in (A \cap H) \setminus \{p\} \implies p \notin \mathrm{ex}(A \cap H)$, противоречие.

Иначе x и y лежат по разные стороны от $H \implies$ одна из них не принадлежит $A \implies$ противоречие. □

Упражнение

$\mathrm{ex}(A \cap H) = \mathrm{ex}(A) \cap H$.

Доказываем теорему индукцией по n.
База $n = 0$ тривиальна.

Переход $n - 1 \to n$.
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт.
Пользуясь индукционным предположением, докажем, что $\mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$.

$\boxed{n=0}$, $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

$$\left[\begin{array}{ll} A = \varnothing & \mathrm{ex}(A) = \varnothing. \\ A = \{0\} & \mathrm{ex}(A) = \{0\}. \end{array}\right.$$

Доказать, что
$A \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex}\, A)$

$$\begin{cases} \mathrm{ex}(A) \subset A \\ A - \text{вып} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{conv}(\mathrm{ex} A) \subset A$$

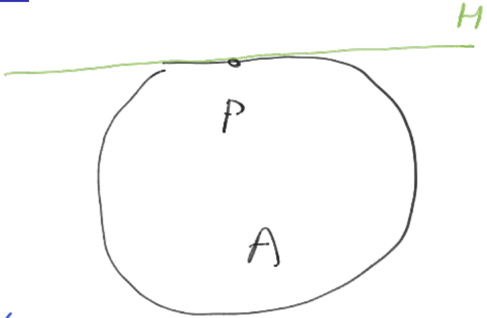
Доказательство — 2: граница множества

Доказываем теорему индукцией по n.
База $n = 0$ тривиальна.

Переход $n - 1 \to n$.
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт.
Пользуясь индукционным предположением, докажем, что $\mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$.

- Пусть $p \in \mathrm{Fr}(A) \implies$ существует опорная гиперплоскость H, содержащая p.

По индукционному предположению и лемме,
$p \in A \cap H = \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A \cap H)) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$ $\boxtimes$



$p \in \mathrm{Fr}(A)$

Применяем инд. предп.
H вместо $\mathbb{R}^n$ $(H = \mathbb{R}^{n-1})$
$A \cap H$ вместо A.

Инд. предп. $\Rightarrow$ $A \cap H = \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A \cap H))$
$\subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$, $p \in A \cap H$

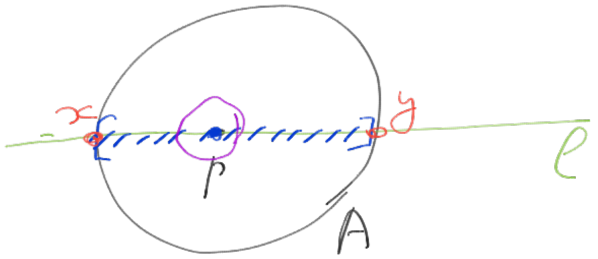
Доказательство — 3: финал

Осталось доказать, что $\mathrm{Int}(A) \subset \boxed{\mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))}$.

Пусть $\cancel{x}$ $p \in \mathrm{Int}(A)$. Проведём любую прямую $\ell \ni p$.
A — выпуклый компакт $\implies A \cap \ell = [xy]$, где $x, y \in A$.

Мы знаем, что $x, y \in \mathrm{Fr}(A)$
$\implies$ из предыдущего $x, y \in \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$
$\implies [xy] \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$
$\implies p \in \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$ $\square$

Теорема доказана



$p \in \mathrm{Int}(A)$

? $p \in \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A))$

ℓ — $\forall$ прямая $\ni p$

$\ell \cap A = [xy]$

$\Leftarrow$ $x, y \in \mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex} A)$

$[xy] \subset \mathrm{conv}(\mathrm{ex} A)$
$\Downarrow$
p

Комментарии

Замечание

Для компактного выпуклого A, $\mathrm{ex}(A)$ — наименьшее множество, выпуклая оболочка которого равна A.

Чтб $M \subset \mathbb{R}^n$, A – вып комп.

$\boxed{\mathrm{conv}(M) = A}$

$\Updownarrow$

$\mathrm{ex}(A) \subset M \subset A$

$\begin{cases} p \in \mathrm{ex}(A) \\ M \subset A \setminus \{p\} \end{cases}$

$A \setminus \{p\}$ – вып

$\Rightarrow$

$\mathrm{conv}(M) \subset A \setminus \{p\}$

Содержание

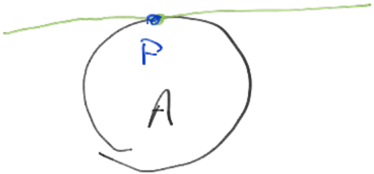
Определение

Определение

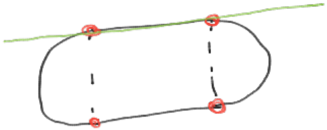
Пусть A — замкнутое выпуклое множество.
Точка $p \in A$ — экспонированная для A, если существует опорная гиперплоскость H такая, что $A \cap H = \{p\}$.
Обозначение: $\mathrm{xp}(A)$ — множество экспонированных точек A.

Замечание

Любая экспонированная точка является экстремальной.
Обратное неверно.



p — экспонированная, если $\exists$ опор. гиперпл. H т. г. $A \cap H = \{p\}$



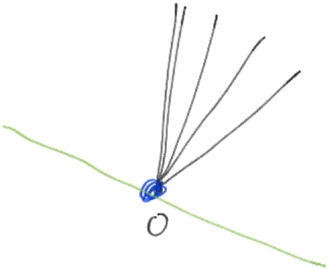
Задачи

Задача

Если A — полиэдральное множество, то $\mathrm{xp}(A) = \mathrm{ex}(A)$.

Задача

Если A — конус, то $\mathrm{xp}(A) = \mathrm{ex}(A)$.



$A \subset \mathbb{R}^n$ – конус,

если:

$\forall v \in A,\ \forall \lambda > 0$

$\lambda v \in A$

Задачи

Задача

Если A — полиэдральное множество, то $\mathrm{xp}(A) = \mathrm{ex}(A)$.

Задача

Если A — конус, то $\mathrm{xp}(A) = \mathrm{ex}(A)$.

Задача

Теорема Страшевича: Если A — выпуклый компакт, то $A = \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}(\mathrm{xp}(A)))$.

Задача

Для любого выпуклого замкнутого A, $\boxed{\mathrm{ex}(A) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{xp}(A))}$. (Т.е. в любой окрестности экстремальной точки есть экспонированные точки.)

$\mathrm{xp}(A) = \{$экспонир. точки $A\}$.

Задача

$\forall p \in \mathrm{ex}(A) \quad \forall \varepsilon > 0$

$\exists q \in \mathrm{xp}(A)$

$|p - q| < \varepsilon$

Содержание

Формулировка

Теорема

Если A — ограниченное полиэдральное множество (пересечение конечного набора замкнутых полупространств), то A — выпуклая оболочка конечного множества точек.

A — $\begin{cases} \text{огр.} \\ \text{пересечение конечного} \end{cases}$ набора $\overline{H}_1^+ \cap \ldots \cap \overline{H}_m^+$

$\Rightarrow$ $\exists$ конечное мн-во M:

$A = \text{conv}(M)$

Доказательство — 1

По теореме Крейна-Мильмана, $A = \mathrm{conv}(\mathrm{ex}(A)) \implies$

Достаточно доказать, что $|\mathrm{ex}(A)| < \infty$

Пусть $A = \overline{H}_1^+ \cap \ldots \overline{H}_m^+$, где $\overline{H}_i^+$ — замкнутые полупространства, ограниченные гиперплоскостями H_i.

Лемма

Пусть $p \in \mathrm{ex}(A)$. Тогда существует подмножество $J = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, m\}$ такое, что

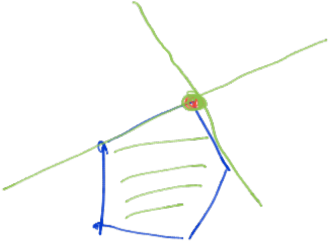
$$H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_s} = \{p\}.$$

$A = \overline{H}_1^+ \cap \ldots \cap \overline{H}_m^+$

$H_1, \ldots, H_m$ — соотв. гиперпл.-ти.

Лемма $p \in ex(A)$

$\Rightarrow$ p — пересечение конечного набора гиперпл.-й $H_1, \ldots, H_m$

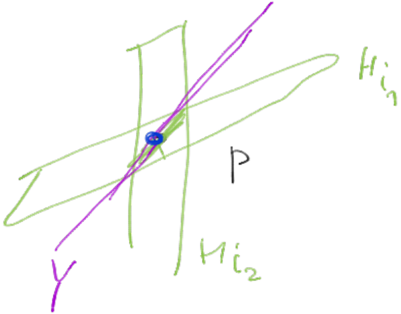


Доказательство леммы

Пусть $J = \{j : p \in H_j\}$. Докажем, что это множество подходит.

Рассмотрим $Y := \bigcup_{j \in J} H_j = H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_s}$.
Это аффинное подпространство, содержащее p.

Предположим, что $Y \neq \{p\}$, тогда $k := \dim Y \geq 1$.



$p \in ex(A)$

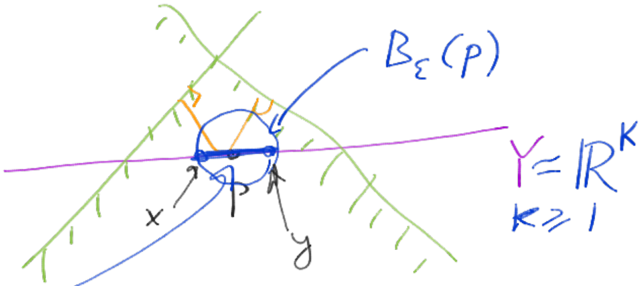
$\{H_j\}(j \in J)$ — все $H_i \ni p$.

$Y = \cap H_j$

$\left[\begin{array}{l} Y = \{p\} \text{ — ok.} \\ \dim Y \geq 1 \text{ — надо рассмотреть} \end{array}\right.$

Доказательство леммы

Пусть $J = \{j : p \in H_j\}$. Докажем, что это множество подходит.



Рассмотрим $Y := \bigcup_{j\in J} H_j = H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_s}$.
Это аффинное подпространство, содержащее p.

Предположим, что $Y \neq \{p\}$, тогда $k := \dim Y \geq 1$.

Пусть $\varepsilon = \min\{d(p, H_i) : i \notin J\}$.
Тогда $D := Y \cap B_\varepsilon(p) \subset A$.

D

$\varepsilon = \min\{d(p, H_i) : i \notin J\}$

$D := Y \cap B_\varepsilon(p) \subset A$

$Y = \bigcap_{j\in J} H_j^+$, $B_\varepsilon(p) \cap \bigcap_{i\notin J} H_i^+$

D — k-мерный шар с центром p, $k \geq 1$.
В нем найдутся $x, y \neq p$ такие, что $p \in [xy]$.
$\implies$ $p \notin \mathrm{ex}(A)$. Противоречие. □

Зад. Если $J = \varnothing$, положим $Y = \mathbb{R}^n$

$p \notin \mathrm{ex}(A) \Longleftarrow p \in [xy] \subset D \subset A$, $x, y \neq p$

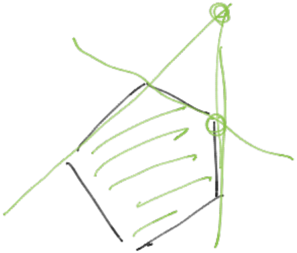
Доказательство теоремы — финал

По лемме, каждой точке p сопоставлено множество $J \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $\{p\} = \bigcup_{j \in J} H_j$.

Получаем отображение из $\mathrm{ex}(A)$ в $2^{\{1,\dots,m\}}$. $\leftarrow \varphi$

Оно инъективно $\implies |\mathrm{ex}(A)| \le 2^m < \infty$.

Теорема доказана



$$\mathrm{ex}(A) \xrightarrow{\varphi} 2^{\{1,\dots,m\}}$$

$$p \in \mathrm{ex}(A) \rightsquigarrow J = J(p) \subset \{1,\dots,m\}$$

Утв φ — инъективно.

$$\varphi(p) = \varphi(q) = J$$

$$p = \bigcap_{j \in J} H_j = q$$

$$\Longrightarrow p = q$$

Сл $|\mathrm{ex}(A)| < \infty$

Доказательство теоремы — финал

По лемме, каждой точке p сопоставлено множество $J \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $\{p\} = \bigcup_{j \in J} H_j$.

Получаем отображение из $\mathrm{ex}(A)$ в $2^{\{1,\dots,m\}}$.

Оно инъективно $\implies \boxed{|\mathrm{ex}(A)| \leq 2^m} < \infty$.

Теорема доказана

Упражнение

Докажите, что у полиэдрального множества в $\mathbb{R}^n$, заданного системой m линейных неравенств, число вершин не больше $\binom{m}{n}$.

$$|\mathrm{ex}(A)| \leq \binom{m}{n}$$

m — "число граней"

n — размерность

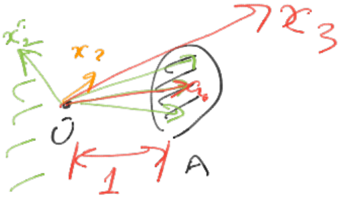
Содержание

Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \;\; \langle x, a\rangle \le 1\}$$

$$x \in A^\circ \iff \forall a \in A \;\; \langle x, a\rangle \le 1$$



$$x_1 \in A^\circ \qquad \forall a \in A \;\; \langle x_1, a\rangle < 0$$

$$x_2 \in A^\circ \qquad \langle x_2, a\rangle < 1$$

$$x_3 \notin A \qquad \exists a_0 \in A : \langle x, a\rangle > 1$$

Определение и примеры

Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a\rangle \leq 1\}$$

Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \leq 1\}$,
где h_A — опорная функция.

$h_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h_A(x) = \sup\{\langle x, a\rangle : a \in A\}.$

$x \in A^0 \Longleftrightarrow \forall a \in A \quad \langle x, a\rangle \leq 1$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\sup\{\langle x, a\rangle\}}_{= h_A(x)} \leq 1$

Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a\rangle \le 1\}$$

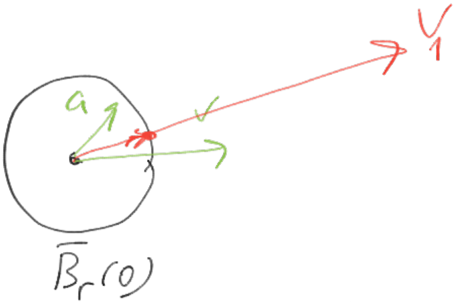
Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \le 1\}$, где h_A — опорная функция.

Примеры

- $(\overline{B}_r(0))^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$.

1) $A = \overline{B}_r(0)$

$A^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$



$|v| \le 1/r \Rightarrow \forall a \in \overline{B}_r(0)$

$\langle a, v\rangle \le 1$

$|v_1| > 1/r \Rightarrow \exists a \in \overline{B}_r(0)$

$\langle v_1, v\rangle = |v_1|\cdot|v| > 1$.

Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a\rangle \leq 1\}$$

Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \leq 1\}$, где h_A — опорная функция.

Примеры

- $(\overline{B}_r(0))^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$.
- $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^n$

2) $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^n$

$\{0\} = \{x : \langle x, 0\rangle \leq 1\}$

Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \quad \langle x, a\rangle \leq 1\}$$

Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \leq 1\}$,
где h_A — опорная функция.

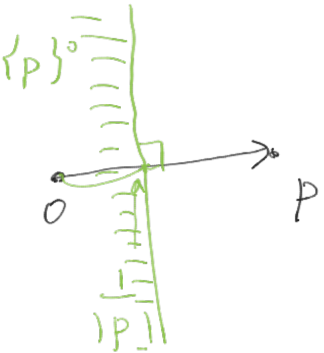
Примеры

- $(\overline{B}_r(0))^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$.
- $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^n$
- Для $p \neq 0$, $\{p\}^\circ$ — замкнутое полупространство

$$\{p\}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p\rangle \leq 1\}$$

3) $p \neq 0$

$$\{p\}^\circ = \{x : \underbrace{\langle x, p\rangle \leq 1}_{\text{лин. нер.}}\}$$



Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \;\; \langle x, a\rangle \leq 1\}$$

Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \leq 1\}$,
где h_A — опорная функция.

Примеры

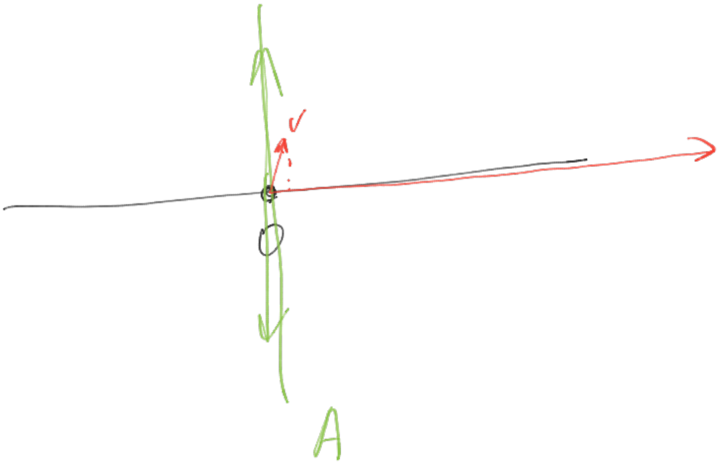
- $(\overline{B}_r(0))^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$.
- $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^n$
- Для $p \neq 0$, $\{p\}^\circ$ — замкнутое полупространство

$$\{p\}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p\rangle \leq 1\}$$

- Если A — линейное подпространство, то $A^\circ = A^\perp$.

4) A — лин. подпр

$A^\circ = A^\perp$



Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a \rangle \leq 1\}$$

Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \leq 1\}$, где h_A — опорная функция.

Примеры

- $(\overline{B}_r(0))^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$.
- $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^n$
- Для $p \neq 0$, $\{p\}^\circ$ — замкнутое полупространство

$$\{p\}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle \leq 1\}$$

- Если A — линейное подпространство, то $A^\circ = A^\perp$.
- (Упражнение) Если A — конус, то

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \langle x, a \rangle \leq 0\}$$