Содержание

Ориентируемые развёртки

Определение

Будем называть развёртку ориентируемой, если каждая буква входит в паре с обратной (например, a и a^{-1}).
То есть, все склеивания сторон — без «перекручивания».

Теорема

Замкнутая поверхность с ориентирумой развёрткой гомеоморфна S^2 или M_p ($p \in \mathbb{N}$).

Дополнение

Более того, развертка переводится в стандартную перечисленными операциями.

Выделение ручки

Пусть есть две пары склеиваемых сторон, разделяющие друг друга, но не идущие подряд. Т.е. развертка имеет вид $axbya^{-1}zb^{-1}w$, где a, b — буквы, x, y, z, w — подслова, хотя бы два из которых непусты. Тогда делаем так:

1. Разрежем по диагонали между началами стрелок a, после чего склеим стороны b:

$$axbya^{-1}zb^{-1}w \longrightarrow axbya^{-1}c + c^{-1}zb^{-1}w \longrightarrow axwc^{-1}zya^{-1}c$$

2. Получили развёртку вида $auc^{-1}va^{-1}c$ $(u = xw,\ v = zy)$. Аналогично, разрежем между концами c и склеим a:

$$auc^{-1}va^{-1}c \longrightarrow aud + d^{-1}c^{-1}va^{-1}c \longrightarrow cd^{-1}c^{-1}vud$$

3. Циклически переставляя, видим ручку: $dcd^{-1}c^{-1}vu$

Выделение всех ручек

Будем проводить выделение ручек, пока возможно.

При выделении новой ручки старые не разрушаются, число сторон и ориентируемость сохраняются $\implies$ придём к ориентируемой развёртке, где такую операцию делать больше нельзя.

Это либо стандартная развёртка M_p, либо остались буквы, не входящие в ручки.

Такие буквы можно убрать, см. далее.

Перемещение ручек по развёртке

Ручку можно поменять местами с любым примыкающим подсловом. Пусть развертка — $xyaba^{-1}b^{-1}$ (x, y — подслова). Меняем местами y и ручку $aba^{-1}b^{-1}$:

1. Отрезаем yab и приклеиваем обратно по b:
$$xyaba^{-1}b^{-1} \longrightarrow xca^{-1}b^{-1} + c^{-1}yab \longrightarrow xca^{-1}c^{-1}ya$$
2. Отрезаем $ca^{-1}c^{-1}$ и приклеиваем обратно по a:
$$xca^{-1}c^{-1}ya \longrightarrow xdya + d^{-1}ca^{-1}c^{-1} \longrightarrow xdyc^{-1}d^{-1}c$$
3. Отрезаем dyc^{-1} и приклеиваем обратно по c:
$$xdyc^{-1}d^{-1}c \longrightarrow xed^{-1}c + e^{-1}dyc^{-1} \longrightarrow xed^{-1}e^{-1}dy$$
4. Переобозначаем $e \to a$ и $d \to b^{-1}$, получаем $xaba^{-1}b^{-1}y$

Завершение доказательства ориентируемого случая

Рассмотрим развёртку, в которой нельзя выделить новых ручек.

Переместим ручки так, чтобы они шли подряд.

Среди оставшихся сторон найдём пару вида a и a^{-1} с минимальным расстоянием между ними.

Они стоят рядом, иначе можно выделить еще одну ручку.

Сократим их и повторим процедуру. Рано или поздно сокращения закончатся и получится развертка M_p.

Если ни одной ручки не было, то сократится всё. Тогда поверхность гомеоморфна сфере.

Содержание

Выделение плёнки

Лемма

Следующие развёртки переводятся друг в друга:

1. $\dots awa \dots$
2. $\dots aaw^{-1} \dots$
3. $\dots w^{-1}aa \dots$

(w — слово, w^{-1} — перевёрнутое w, троеточия не меняются)

Доказательство.

$1 \to 2$: Отрежем aw, перевернем, приклеим по a, переименуем:

$$xaway \longrightarrow xbay + b^{-1}aw \longrightarrow$$
$$\longrightarrow xbay + w^{-1}a^{-1}b \longrightarrow xbbw^{-1}y \longrightarrow xaaw^{-1}y$$

$1 \to 3$: действуем симметрично.

$2 \to 1$ и $3 \to 1$: В обратном порядке. $\square$

Выделение ручек и плёнок

Лемма позволяет:

- Выделять плёнки: $\ldots xaway \ldots \longrightarrow \ldots xaaw^{-1}y \ldots$.
  Будем повторять это, пока можно.
- Перемещать плёнки: $\ldots xw^{-1}aay \ldots \longrightarrow \ldots xaaw^{-1}y \ldots$.
  Переместим их, чтобы шли подряд.

На оставшейся дуге делаем как в ориентируемом случае:

- Выделяем ручки, пока можно.
- Перемещаем ручки к плёнкам.
- Сокращаем то, что осталось.

Получился многоугольник, состоящий из плёнок и ручек.

Плёнка + ручка = 3 плёнки

Ручку и плёнку можно переделать в 3 плёнки, несколько раз применив лемму:

1. $\dots aba^{-1}b^{-1}cc\dots \longrightarrow \dots abcbac\dots$
2. $\dots abcbac\dots \longrightarrow \dots aab^{-1}c^{-1}b^{-1}c\dots$
3. $\dots aab^{-1}c^{-1}b^{-1}c\dots \longrightarrow \dots aab^{-1}b^{-1}cc\dots$

Такими операциями развёртка переводится в стандартную развёртку N_q.

Доказательство в неориентируемом случае закончено.

Итог: алгоритм приведения развёртки к стандартному виду

1. Выделяем плёнки и ручки, пока это возможно.
2. Перемещаем их так, чтобы они шли подряд.
3. Проводим сокращения, пока это возможно.
   (Если сократилось всё, то поверхность — сфера.)
4. Пока есть и ручки, и плёнки, заменяем ручку и плёнку на 3 плёнки.

Содержание

Определение евклидова пространства

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение

Скалярное произведение на X — функция

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \colon X \times X \to \mathbb{R}$$

удовлетворяющая условиям:

1. Симметричность: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in X$
2. Линейность по каждому аргументу:
   $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \quad \forall x, y, z \in X$
   $\langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in X,\ \forall a \in \mathbb{R}$
3. Положительность: $\langle x, x\rangle \geq 0$, равенство только при $x = 0$.

Евклидово пространство — векторное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

Основные примеры

- Пространство $\mathbb{R}^n$. **Стандартное** скалярное произведение:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

  где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

- Подпространства
  Пусть X — евклидово пространство,
  $Y \subset X$ — линейное подпространство.
  Тогда Y (с сужением того же скалярного произведения) — тоже евклидово пространство

Другие примеры

Упражнение

Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, c > 0$, $ac - b^2 > 0$. Определим на $\mathbb{R}^2$ нестандартное скалярное произведение:

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

1. Это действительно скалярное произведение.
2. Любое скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$ имеет такой вид.

Упражнение

Пусть X — пространство всех непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Определим

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

Это тоже скалярное произведение.

Норма и расстояние

Пусть X — евклидово пространство.

Определение

Длина (норма) вектора $x \in X$: $\quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Расстояние между $x, y \in X$: $\quad d(x, y) = |x - y|$

Неравенство треугольника докажем позже.

Пример: норма и расстояние в $\mathbb{R}^n$

Для $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ в $\mathbb{R}^n$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Свойства произведения, нормы и расстояния

- Можно раскрывать скобки как обычно:

$$\left\langle \sum x_i, \sum y_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle$$

- В частности, $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$
- Положительность нормы: $|x| > 0$ при $x \neq 0$
- Симметричность нормы: $|-x| = |x|$
- Однородность нормы: $|ax| = |a||x| \qquad (x \in X, a \in \mathbb{R})$
- Расстояние сохраняется при параллельных переносах:

$$d(x,y) = d(x+z, y+z)$$

Тождество параллелограмма

Упражнение

1. В евклидовом пространстве X для любых $x, y \in X$ верно «тождество параллелограмма»:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

2. Пусть на векторном пространстве X задана функция $\|\cdot\|$, которая
   - положительна: $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$
   - положительно однородна: $\|ax\| = a\|x\| \quad \forall a \geq 0,\ x \in X$
   - удовлетворяет тождеству параллелограмма.

   Тогда существует скалярное произведение, определяемая которым норма равна $\|\cdot\|$.

Содержание

Пусть X — евклидово пространство.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского-Шварца)

Для любых $x, y \in X$

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|.$$

Равенство $\iff$ x *и* y *линейно зависимы.*

Замечание

Если x и y сонаправлены, то

$$\langle x, y\rangle = |x||y|.$$

Если они противоположно направлены, то

$$\langle x, y\rangle = -|x||y|.$$

Доказательство неравенства КБШ

Если $x = 0$ или $y = 0$, неравенство тривиально. Пусть $x, y \neq 0$.

Положим $c = \frac{\langle x,y\rangle}{|y|^2}$. Преобразуем $|x - cy|^2 \geq 0$:

$\langle x - cy, x - cy\rangle \geq 0$ (определение $|\cdot|$)

$|x|^2 + c^2|y|^2 - 2c\langle x, y\rangle \geq 0$

$|x|^2 + \frac{\langle x,y\rangle^2}{|y|^2} - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{|y|^2} \geq 0$ (подставили $c = \frac{\langle x,y\rangle}{|y|^2}$)

$|x|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{|y|^2} \geq 0$

$|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2 \geq 0$

$|x|^2|y|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$

$|x||y| \geq |\langle x, y\rangle|$

Случай равенства в КБШ

В случае равенства $x - cy = 0 \implies x$ и y линейно зависимы.

Обратно, если x и y линейно зависимы, то $\langle x, y\rangle = \pm|x||y|$ $\implies$ равенство в КБШ.

Неравенство треугольника для нормы

Следствие

Для любых $x, y \in X$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Равенство $\iff$ *один из векторов равен 0 или они сонаправлены.*

Доказательство.

Возведем в квадрат:

$$|x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

Сокращая, получаем КБШ (без модуля).
Равенство $\iff$ равенство в КБШ и $\langle x, y\rangle \geq 0$. $\square$

Неравенство треугольника для расстояний

Следствие

Для любых $x, y, z \in X$, $\quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.
Равенство $\iff$ *векторы* $x - y$ *и* $y - z$ *сонаправлены или один из них равен 0*
(геометрически это означает, что y *лежит на отрезке* $[xz]$*).*

Доказательство.

Положим $u = x - y$, $v = y - z$, применим предыдущее неравенство:

$$|u + v| \le |u| + |v|$$

и заметим, что $u + v = x - z$. □