Содержание

Определение

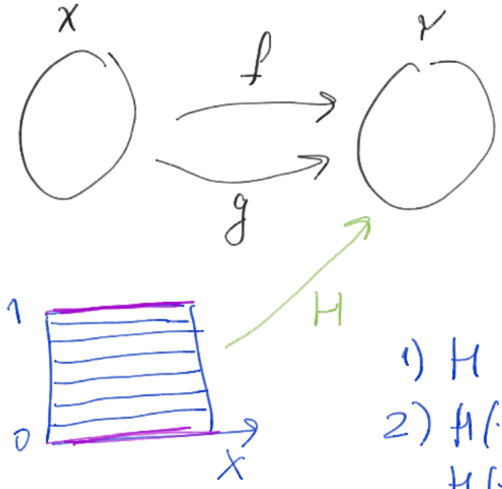
Пусть X, Y — топологические пространства,
$f, g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения.

Определение

f и g гомотопны (обозначение: $f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что

- $H(x,0) = f(x)$ для всех $x \in X$;
- $H(x,1) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Отображение H называется гомотопией между f и g.



1) H непр.
2) $H(\cdot,0)=f$
$H(\cdot,1)=g$

Определение

Пусть X, Y — топологические пространства,
$f, g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения.

Определение

f и g **гомотопны** (обозначение: $f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H\colon X \times [0,1] \to Y$ такое, что

- $H(x,0) = f(x)$ для всех $x \in X$;
- $H(x,1) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Отображение H называется **гомотопией** между f и g.

Замечание

Гомотопию можно рассматривать как «непрерывное семейство» отображений $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$, $f_t\colon X \to Y$, $f_t(x) = H(x,t)$, с условием $f_0 = f$ и $f_1 = g$.

«Непрерывность» семейства $\{f_t\}$ определяется как непрерывность соответствующего H.

$\boxed{H\colon X \times [0,1] \to Y}$

$\{f_t\}_{t\in[0,1]}$

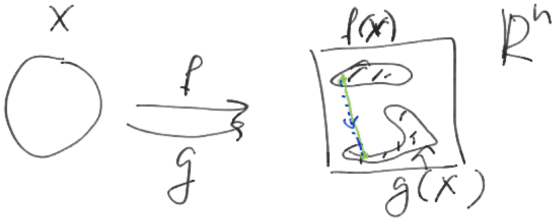
$f_t\colon X \to Y$

$f_t(x) = H(x,t)$

Примеры

Пример

Любые два отображения $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ гомотопны.
Они связаны, например, линейной гомотопией
$f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.



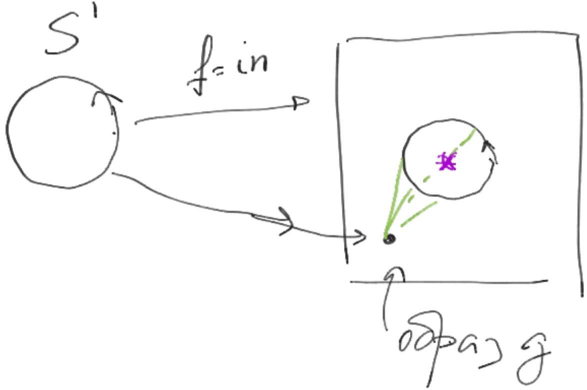
$$f_t(x) = (1-t)\,f(x) + t\cdot g(x)$$

Пример

Любые два отображения $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ гомотопны.
Они связаны, например, линейной гомотопией
$f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Пример

Рассмотрим $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: f — стандартное вложение, g — постоянное отображение.
Они не гомотопны. Доказательство будет позже.



Примеры

Пример

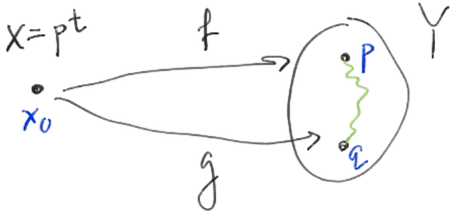
Любые два отображения $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ гомотопны.
Они связаны, например, линейной гомотопией
$f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Пример

Рассмотрим $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: f — стандартное вложение, g — постоянное отображение.
Они не гомотопны. Доказательство будет позже.

Пример

Обозначим через pt пространство из одной точки.
Отображения $f, g\colon pt \to Y$ гомотопны $\iff$ их образы лежат в одной компоненте линейной связности.



$H\colon \underbrace{\{pt\} \times [0,1] \cong [0,1]} \to Y$

$H(0) = p$

$H(1) = q$

Гомотопность — отношение эквивалентности

Теорема

Гомотопность — отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из X в Y.

Гомотопность — отношение эквивалентности

Теорема

Гомотопность — отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из X в Y.

Доказательство.

1. $f \sim f$. Возьмём $f_t = f$.

1) $f_t(x) = f(x)$

$H: X \times [0,1] \to Y$

$H(x,t) = f(x)$

$(x,t) \xmapsto{pr_X} x \xmapsto{f} f(x)$

Теорема

Гомотопность — отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из X в Y.

Доказательство.

1. $f \sim f$. Возьмём $f_t = f$.

2. $f \sim g \implies g \sim f$.
Если $\{f_t\}$ соединяет f с g, то $\{f_{1-t}\}$ соединяет g с f.

2) $f \sim g$

$\exists \{f_t\} : f_0 = f, f_1 = g$

$\{g_t\} \quad g_t = f_{1-t}$

Гомотопность — отношение эквивалентности

Теорема

Гомотопность — отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из X в Y.

Доказательство.

1. $f \sim f$. Возьмём $f_t = f$.

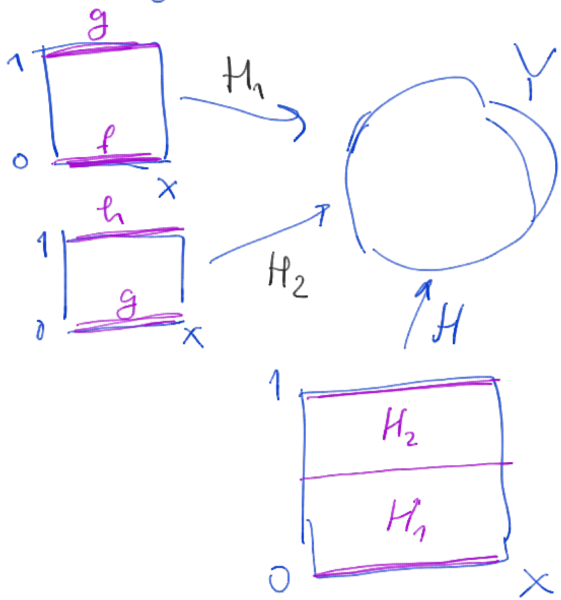
2. $f \sim g \implies g \sim f$.
Если $\{f_t\}$ соединяет f с g, то $\{f_{1-t}\}$ соединяет g с f.

3. $f \sim g$ и $g \sim h \implies f \sim h$.
Если $H_1, H_2 \colon X \times [0,1] \to Y$ — гомотопии между f и g и между g и h, определяем гомотопию H между f и h так:

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & t \le \frac{1}{2}, \\ H_2(x, 2t-1), & t \ge \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Непрерывность H следует из свойств фундаментальных покрытий. □

3) $f \sim g$, $g \sim h$.



Теорема

Пусть X, Y, Z — топологические пространства,
$f_0, f_1 \colon X \to Y$ гомотопны и $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ гомотопны.
Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Доказательство.

Пусть $\{f_t\}$ соединяет f_0 и f_1, $\{g_t\}$ соединяет g_0 и g_1.
Тогда $\{g_t \circ f_t\}$ — гомотопия между $g_0 \circ f_0$ и $g_1 \circ f_1$. $\square$

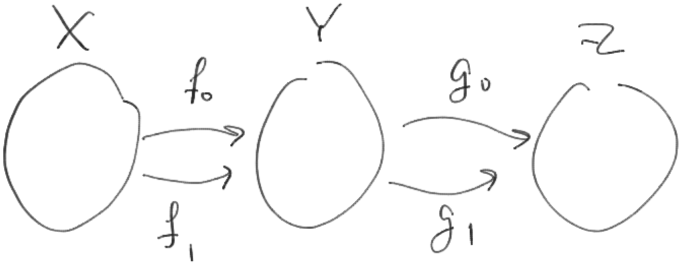
$$H(x,t) = H_2(H_1(x,t), t)$$

$$(x,t) \longrightarrow H_1(x,t) \searrow (H_1(x,t), t)$$

$$\longrightarrow t \nearrow$$

$$\downarrow H_2$$

$$- \; . \; -$$



$$f_0 \overset{H_1}{\sim} f_1, \quad g_0 \overset{H_2}{\sim} g_1$$

$$\Longrightarrow g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$$

<u>Д-во:</u> $\{h_t\}$, $h_t : X \to Z$

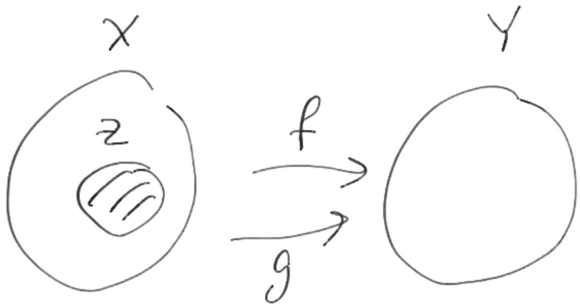
$$h_t = g_t \circ f_t$$

Содержание

Связанная гомотопия

Определение

Пусть X, Y — топологические пространства, $Z \subset X$. Гомотопия $\{f_t\}$ отображений из X в Y называется связанной на Z, если сужение $(f_t)|_Z$ одинаково для всех $t \in [0, 1]$.



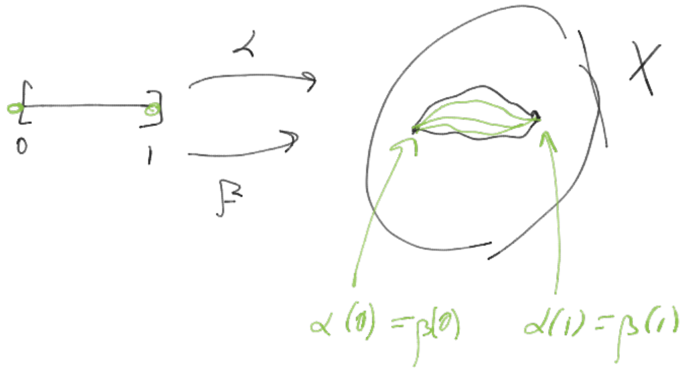
$\{f_t\} \approx H$ - связана на Z,

если $(f_t)|_Z = (f_0)|_Z \quad \forall t$

Определение (гомотопия путей)

Два пути $\alpha, \beta \colon [0,1] \to X$ **гомотопны**, если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0,1\}$, т.е. с фиксированными концами.

Обозначение: $\alpha \sim \beta$ (то же самое!).

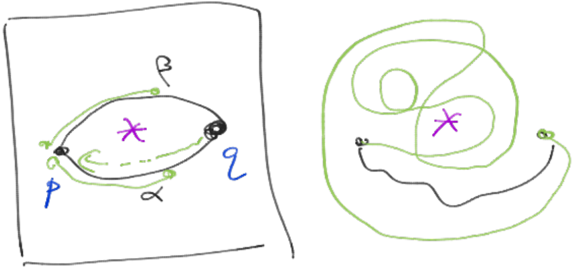


Замечание

Если пути α и β гомотопны, то $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$.

Замечание

Обычная (не связанная) гомотопия для путей никогда не рассматривается.



Очевидно, гомотопность путей — тоже отношение эквивалентности.

$Z = \{0, 1\}$

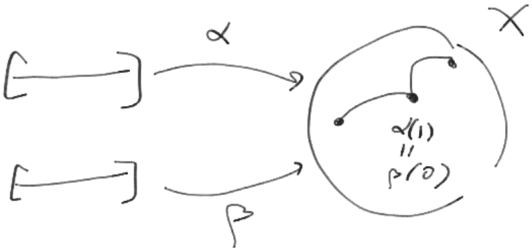
Произведение путей

Определение (произведение путей)

Пусть $\alpha, \beta\colon [0,1] \to X$ — пути, $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда определено произведение путей $\alpha\beta$:

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \le \frac{1}{2} \\ \cancel{\alpha(2t)}, & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

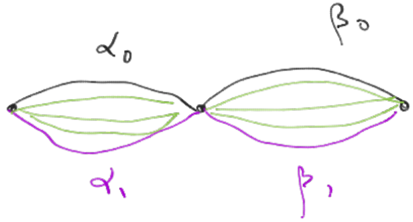
$\beta(2t-1)$



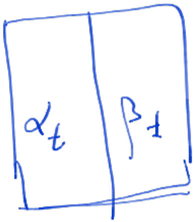
Произведение путей и гомотопия путей

Верны следующие свойства (в предположении, что рассматриваемые произведения путей определены):

- Если $\alpha_0 \sim \alpha_1$ и $\beta_0 \sim \beta_1$, то $\boxed{\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1.}$



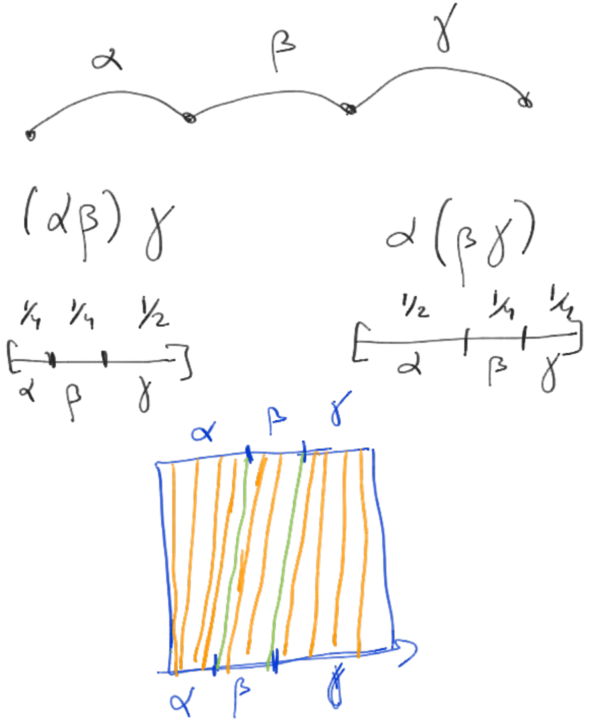
$$\gamma_t = \alpha_t \beta_t$$



Произведение путей и гомотопия путей

Верны следующие свойства (в предположении, что рассматриваемые произведения путей определены):

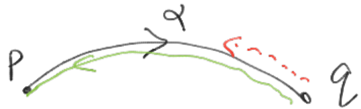
- Если $\alpha_0 \sim \alpha_1$ и $\beta_0 \sim \beta_1$, то $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$.
- $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.



Произведение путей и гомотопия путей

Верны следующие свойства (в предположении, что рассматриваемые произведения путей определены):

- Если $\alpha_0 \sim \alpha_1$ и $\beta_0 \sim \beta_1$, то $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$.
- $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.
- Пусть $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$. Тогда $\alpha\alpha' \sim const$. Обозначение: $\alpha^{-1} = \alpha'$.

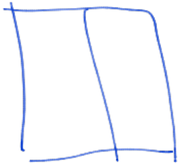


$$\alpha'(t) = \alpha(1-t)$$

$$\alpha\alpha' \sim const_p$$

$$H(x,t) = \begin{cases} \alpha(2(1-t)x), & x \le 1/2 \\ \alpha(2(1-t)(1-x)), & x \ge 1/2 \end{cases}$$

$\alpha(1-t)$



$\alpha = \alpha(x)$

$\gamma = \alpha\alpha'$

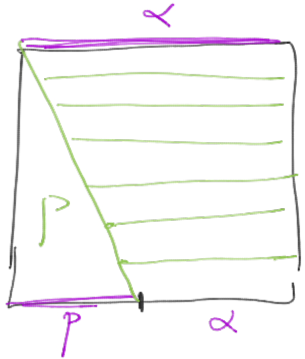
$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(2x), & x \le 1/2 \\ \alpha(2-2x), & x \ge 1/2 \end{cases}$$

Произведение путей и гомотопия путей

Верны следующие свойства (в предположении, что рассматриваемые произведения путей определены):

- Если $\alpha_0 \sim \alpha_1$ и $\beta_0 \sim \beta_1$, то $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$.
- $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.
- Пусть $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$. Тогда $\alpha\alpha' \sim const$.
  Обозначение: $\alpha^{-1} = \alpha'$.
- Пусть p и q — постоянные пути в начале и конце α.
  Тогда $p\alpha \sim \alpha q \sim \alpha$.

$$const_p \cdot \alpha \sim \alpha \sim \alpha \cdot const_q$$



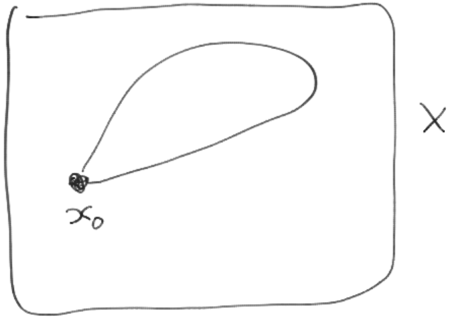
Содержание

Петли

Пусть X — топологическое пространство,
$x_0 \in X$ — отмеченная точка.

Определение

Петля — путь, у которого конец совпадает с началом.
Обозначение: $\Omega(X, x_0)$ — множество петель в X с началом и концом в x_0.



Определение фундаментальной группы

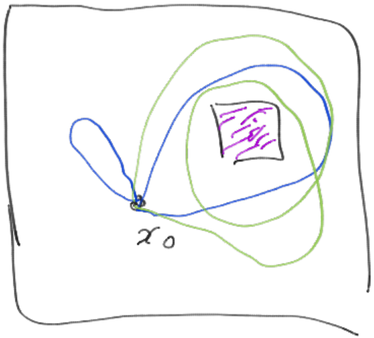
Определение

Фундаментальная группа топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 (обозначение: $\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- Множество элементов группы — фактор-множество $\Omega(X, x_0)/\sim$, где $\sim$ — гомотопность путей (с фиксированными концами в x_0).
- Групповое произведение определяется формулой

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$

  где $[\ldots]$ — класс эквивалентности, $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.



Корректность определения

Теорема

- *Групповое произведение в $\pi_1(X, x_0)$ определено корректно.*
- *$\pi_1(X, x_0)$ — группа.*

Доказательство.

Из свойств гомотопий путей. □

1) Корректность

Надо: $[\alpha] = [\alpha'], \ [\beta] = [\beta'] \Rightarrow [\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\alpha \sim \alpha', \ \beta \sim \beta' \Rightarrow \alpha\beta \sim \alpha'\beta'}$$

2) Ассоциативность:

$$([\alpha][\beta])[\gamma] \overset{?}{=} [\alpha]([\beta][\gamma])$$

$$[\alpha\beta]\cdot[\gamma] \qquad [\alpha]\cdot[\beta\gamma]$$

$$[(\alpha\beta)\gamma] \overset{?}{=} [\alpha(\beta\gamma)]$$

$$\boxed{(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)}$$

3) Нейтральный элемент.

$$e = [const_{x_0}]$$

$$\boxed{const_{x_0}\cdot\alpha \sim \alpha \sim \alpha\cdot const_{x_0}}$$

4) Обратный эл-т.

$[\alpha]^{-1} = [\alpha']$, $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$.

$$\boxed{\alpha\alpha' \sim const_{x_0}}$$

$$\boxed{\alpha'\alpha \sim const_{x_0}}$$

Примеры (без доказательства)

- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e\}$ для любой точки x_0.

$\pi_1(X, x_0)$

$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{e\}$

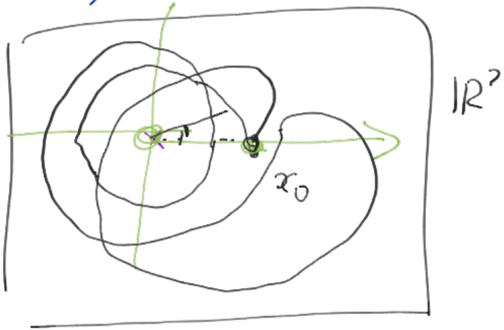
(линейные гомотопии).

Примеры (без доказательства)

- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e\}$ для любой точки x_0.
- $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.

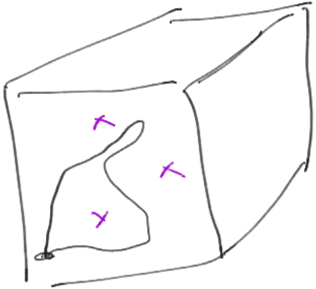
$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.



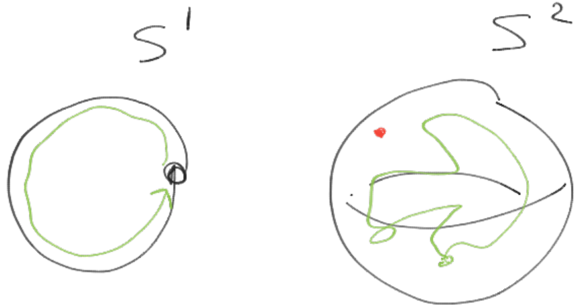
Примеры (без доказательства)

- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e\}$ для любой точки x_0.
- $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.
- При $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbb{R}^{n\cancel{+1}} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}) \simeq \{e\}$ для любого набора точек $p_1, \ldots, p_k$.



Примеры (без доказательства)

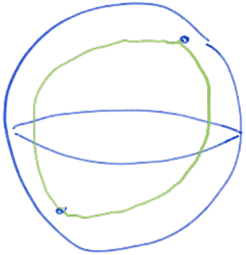
- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e\}$ для любой точки x_0.
- $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.
- При $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}) \simeq \{e\}$ для любого набора точек $p_1, \ldots, p_k$.
- При $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{S}^n) \simeq \{e\}$



Примеры (без доказательства)

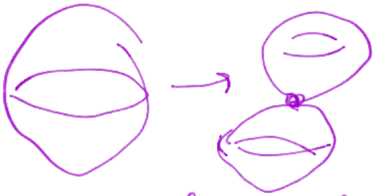
$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$$

- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e\}$ для любой точки x_0.
- $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.
- При $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}) \simeq \{e\}$ для любого набора точек $p_1, \ldots, p_k$.
- При $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{S}^n) \simeq \{e\}$
- $\pi_1(RP^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.

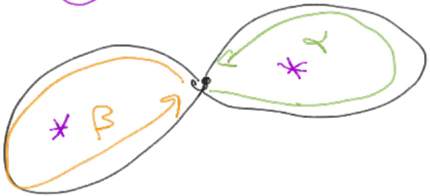


Примеры (без доказательства)

- $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e\}$ для любой точки x_0.
- $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.
- При $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}) \simeq \{e\}$ для любого набора точек $p_1, \ldots, p_k$.
- При $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{S}^n) \simeq \{e\}$
- $\pi_1(RP^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.
- π_1 букета двух или более окружностей — свободная группа (не коммутативная).



стягивание экватора



$\alpha\beta \not\sim \beta\alpha$