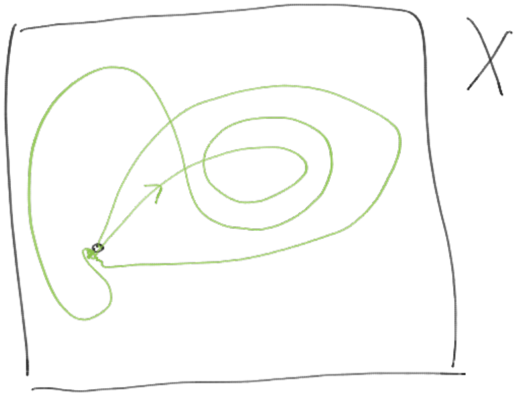
# Содержание





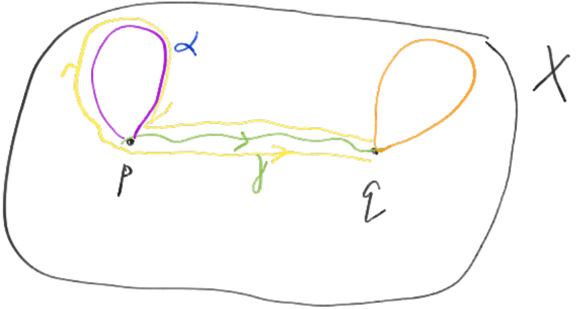
Пусть $X$ — топологическое пространство.

## Определение

Пусть $\gamma$ — пусть в $X$, $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$.
Перенос вдоль пути $\gamma$ — отображение
$T_\gamma : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$, определяемое равенством

$$T_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$$

для всех $\alpha \in \Omega(X, p)$.




$$T_\gamma : \pi_1(X, p) \longrightarrow \pi_1(X, q)$$

$$T_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$$

# Свойства $T_\gamma$

- Он корректно определён.

$\alpha \sim \alpha'$

$\gamma^{-1}\alpha\gamma \sim \gamma^{-1}\alpha'\gamma$

$T_\gamma([\alpha]) = T_\gamma([\alpha'])$

## Свойства $T_\gamma$

- Он корректно определён.
- Это гомоморфизм групп.

$$T_\gamma : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q)$$

Надо: $T_\gamma([\alpha][\beta]) = T_\gamma([\alpha])\cdot T_\gamma([\beta])$

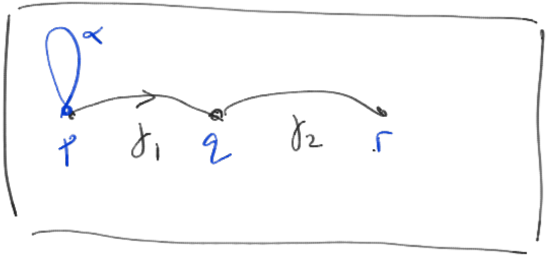
$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$$

л.ч. $= [\gamma^{-1}(\alpha\beta)\gamma]$

п.ч. $= [\gamma^{-1}\alpha\gamma]\cdot[\gamma^{-1}\beta\gamma] =$

$$= [\gamma^{-1}\alpha\underbrace{\cancel{\gamma\gamma^{-1}}}_{\sim const}\beta\gamma]$$

- Он корректно определён.
- Это гомоморфизм групп.
- $\underbrace{T_{\gamma_1\gamma_2}} = T_{\gamma_2} \circ T_{\gamma_1}$.




$$T_{\gamma_1\gamma_2}([\alpha]) = [(\gamma_1\gamma_2)^{-1}\alpha(\gamma_1\gamma_2)]$$

$$\parallel \quad = [\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\alpha\gamma_1\gamma_2]$$

$$T_{\gamma_2}\circ T_{\gamma_1}([\alpha]) = T_{\gamma_2}(\underbrace{T_{\gamma_1}([\alpha])})$$

$$= T_{\gamma_2}([\underbrace{\gamma_1^{-1}\alpha\gamma_1}]) =$$

$$\parallel \quad = [\gamma_2^{-1}\underbrace{\gamma_1^{-1}\alpha\gamma_1}\gamma_2]$$

# Свойства $T_\gamma$

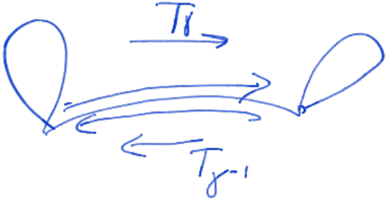
- Он корректно определён.
- Это гомоморфизм групп.
- $T_{\gamma_1\gamma_2} = T_{\gamma_2} \circ T_{\gamma_1}$.
- Это изоморфизм групп $\pi_1(X, p)$ и $\pi_1(X, q)$

Изоморфизм = гомоморфизм и биекция

Th. $T_{(\gamma^{-1})}$ — левый и правый обратный к $T_\gamma$

$$id = T_{const} = T_{\gamma^{-1}\gamma} = T_{(\gamma^{-1})} \circ T_\gamma = id_{\pi_1(X,p)}$$

$$T_\gamma \circ T_{(\gamma^{-1})} = id_{\pi_1(X,q)}$$



# Свойства $T_\gamma$

- Он корректно определён.
- Это гомоморфизм групп.
- $T_{\gamma_1\gamma_2} = T_{\gamma_2} \circ T_{\gamma_1}$.
- Это изоморфизм групп $\pi_1(X,p)$ и $\pi_1(X,q)$

**Следствие**

*Если $X$ линейно связно, то для любых $p,q \in X$, группы $\pi_1(X,p)$ и $\pi_1(X,q)$ изоморфны.*

**Замечание**

Имея в виду это следствие, для линейно связных пространств иногда пропускают указание отмеченной точки в обозначении фундаментальной группы: $\pi_1(X) = \pi_1(X,p)$.

$X$ – лин. св

$\pi_1(X,p) \simeq \pi_1(X,q)$

изоморфизм групп.

V

$\pi_1(X) := \pi_1(X,p)$

для произв. $p \in X$.

# Содержание

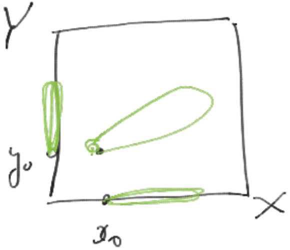
## Теорема

*Пусть $X, Y$ — топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Тогда*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

*В краткой записи:*

$$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$




Упр. $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

## Теорема

*Пусть $X, Y$ — топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Тогда*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

*В краткой записи:*

$$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

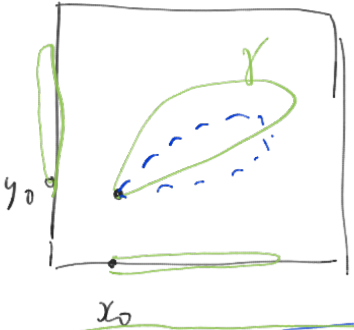
## Доказательство.

Теорема о покоординатной непрерывности дает биекцию

$$\Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0) \to \boxed{\Omega(X \times Y, (x_0, y_0))},$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \gamma, \qquad \gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

Эта биекция сохраняет гомотопность путей и коммутирует с произведением путей $\implies$ она индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. □




$$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

$$\alpha \sim \alpha_1 \qquad \beta \sim \beta_1$$

$$\iff (\alpha, \beta) \sim (\alpha_1, \beta_1).$$

$$H : [0,1] \times [0,1] \to$$

$X$

$Y$

$X \times Y$

# Для записей

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2$$
$$\beta = \beta_1 \beta_1$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma = (\alpha, \beta) = (\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2) =$$
$$= (\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2)$$

$$\varphi : \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X \times Y)$$
$$([\alpha], [\beta]) \longleftrightarrow [(\alpha, \beta)]$$

$\gamma$, где $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$

# Следствие: $\mathbb{R}^n$ без точки и сфера

### Следствие

$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^{\cancel{1}})$. $n-1$

$V$

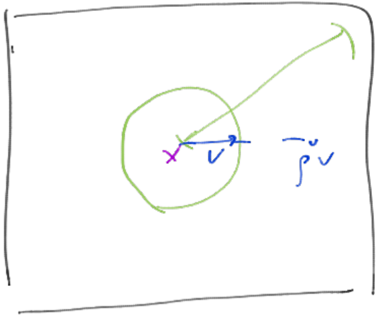
### Доказательство.

$\mathbb{R}^{n\cancel{-1}} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty) \simeq \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

$\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$ (вспомним про линейные гомотопии)

Отсюда следует результат. □

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1} \times (0, +\infty) \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$$




$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) \times \underbrace{\pi_1(\mathbb{R})}_{=\{e\}} \simeq$$

$$\simeq \pi_1(S^{n-1})$$

$\rho \cdot v \leftarrow (v, \rho)$

$w \rightarrow \left(\frac{w}{|w|}, |w|\right)$

$w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

## Содержание

# Определение

Пусть $X, Y$ — топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$.

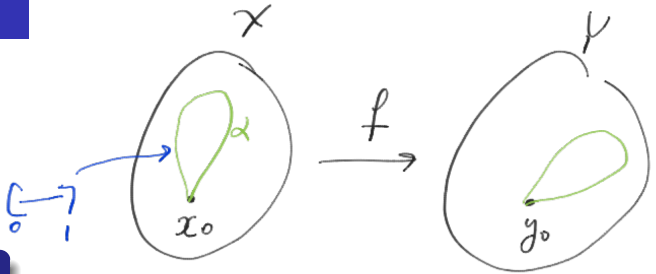
Обозначение: $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$.

## Определение

Индуцированный гомоморфизм $f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to (Y, y_0)$ определяется равенством

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

для всех $\alpha \in \Omega(X, x_0)$.




$y_0 = f(x_0).$

$\alpha \colon [0,1] \to X$

$\cancel{f(\alpha)}$

$\boxed{\text{Опр. } f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \quad f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha].}$

...

Неверно:

$f([\alpha]) = [f \circ \alpha]$

# Корректность и свойства

**Теорема**

- $f_*$ *корректно определён.*

Если $\alpha \sim \alpha_1$

$\Rightarrow f \circ \alpha \sim f \circ \alpha_1$

$f_*([\alpha]) = f_*([\alpha_1])$

## Корректность и свойства

### Теорема

- $f_*$ корректно определён.
- $f_*$ — гомоморфизм из $\pi_1(X, x_0)$ в $\pi_1(Y, y_0)$.

$$? \quad f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta])$$

$$\text{л.ч.} = f_*([\alpha\beta]) =$$

$$= [f \circ (\alpha\beta)] =$$

$$= [(f \circ \alpha)(f \circ \beta)]$$

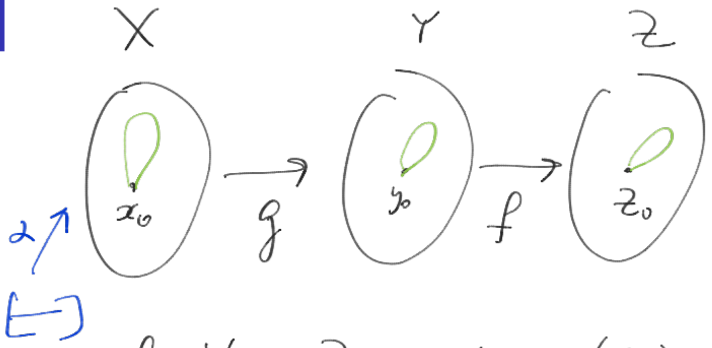
$$\text{п.ч.} = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] =$$

$$= [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)]$$

# Корректность и свойства

**Теорема**

- $f_*$ *корректно определён.*
- $f_*$ — *гомоморфизм из* $\pi_1(X, x_0)$ *в* $(Y, y_0)$.
- *Выполняется равенство* $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.




$\underline{D}$: $(f \circ g) \circ \alpha = f \circ (g \circ \alpha)$.

$f : Y \to Z$ $\quad y = g(x_0)$

$g : X \to Y$ $\quad z = f(y_0)$

$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

# Корректность и свойства

**Теорема**

- $f_*$ *корректно определён.*
- $f_*$ *— гомоморфизм из* $\pi_1(X, x_0)$ *в* $(Y, y_0)$.
- *Выполняется равенство* $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
- $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

**Доказательство.**

Прямая проверка. □

$id : X \to X$

$id_* : \pi_1(X, x_0) \circlearrowleft$

тождественно.

# Содержание

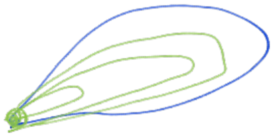
# Определение

## Определение

Топологическое пространство $X$ односвязно, если оно линейно связно и $\pi_1(X) \simeq \{e\}$.

## Замечание

Условие $\pi_1(X) = \{e\}$ равносильно тому, что любая петля гомотопна постоянной.



## Определение

### Определение

Топологическое пространство $X$ односвязно, если оно линейно связно и $\pi_1(X) \simeq \{e\}$.

### Замечание

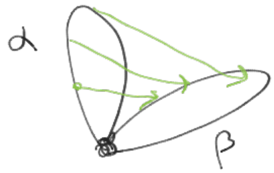
Условие $\pi_1(X) = \{e\}$ равносильно тому, что любая петля гомотопна постоянной.

**Простейшие примеры:**

- $\mathbb{R}^n$ односвязно (для любого $n \geq 0$).
- Любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ односвязно.
- Любое звёздное множество в $\mathbb{R}^n$ односвязно. (Определение: $A \subset \mathbb{R}^n$ — звёздное, если $\exists p \in A : \forall x \in A\ [px] \subset A$.)

### Доказательство.

Линейные гомотопии и независимость $\pi_1$ от отмеченной точки. $\square$



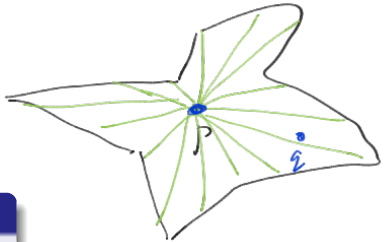

$\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$\{\alpha_t\}$

$\alpha_t : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$\alpha_t(x) = (1-t)\alpha(x) + t \cdot \beta(x)$

$\pi_1(X,p) \simeq \pi_1(X,q)$



# Односвязность сфер

**Теорема**

*Для любого* $n \geq 2$*, сфера* $\mathbb{S}^n$ *односвязна.*

# Доказательство при наличии свободной точки

Пусть $\alpha$ — петля в $\mathbb{S}^n$. Будем доказывать, что она гомотопна постоянной.

Сначала рассмотрим случай, когда образ $\alpha$ не покрывает $\mathbb{S}^n$.

Пусть $q \in \mathbb{S}^n$ не лежит в образе $\alpha$.
Тогда $\alpha$ лежит в $\mathbb{S}^n \setminus \{q\} \simeq \mathbb{R}^n$.
Но $\mathbb{R}^n$ односвязно $\implies$ $\alpha$ можно стянуть в точку.

Осталось доказать лемму о свободной точке (далее).

$q \notin \alpha([0,1])$

$S^n \setminus \{q\} \simeq \mathbb{R}^n$

# Лемма о свободной точке

**Лемма**

*Любая петля в $\mathbb{S}^n$ $(n \geq 2)$ гомотопна такой, которая не покрывает всю сферу.*

# Лемма о свободной точке

## Лемма

*Любая петля в $\mathbb{S}^n$ $(n \geq 2)$ гомотопна такой, которая не покрывает всю сферу.*

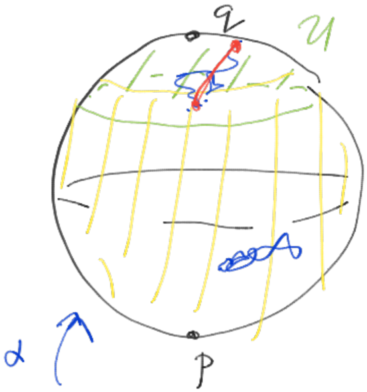
## Доказательство.

Пусть $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^n, p)$, $q = -p$.
Покроем сферу открытыми множествами $U$ и $V$: $U$ — маленький шар с центром в $q$, $V$ — дополнение ещё меньшего замкнутого шара.

По лемме Лебега есть такое $\delta > 0$, что $\alpha$-образ любого интервала длины $\delta$ содержится в $U$ или в $V$.

Разобьём $[0, 1]$ на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ длины меньше $\delta$. На тех, чьи образы попадают в $U$, заменим соответствующие участки $\alpha$ на дуги больших кругов. Полученная петля гомотопна исходной.

Дуги больших кругов не могут покрыть окрестность $p$ $\Longrightarrow$ найдётся свободная точка. $\square$




$\alpha \in \Omega(S^n, p).$

Лемма Лебега

$\exists\, \delta:$

$\alpha(B_\delta(x)) \subset \left[\begin{array}{l} U \\ V \end{array}\right.$


$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$

$|x_i - x_{i+1}| < \delta$

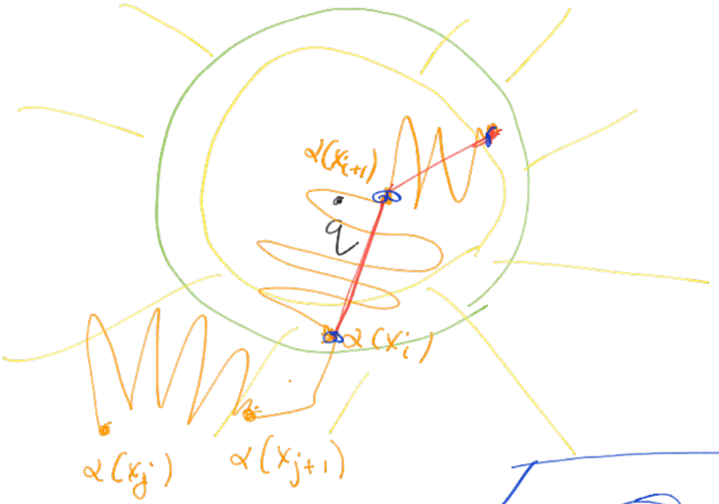
если $\alpha([x_i, x_{i+1}]) \subset U$

заменяем $\alpha|_{[x_i, x_{i+1}]}$ на

дугу большой окр-ти

с теми же концами.

# Для записей

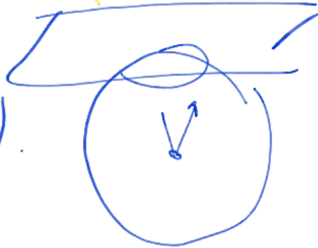




$\alpha_1$ — новая петля.

$\alpha_1 \sim \alpha$

$\alpha_1([0,1]) \cap (S^n \setminus V)$

— набор "отрезков" (дуг больших кругов).



### Следствие

*При* $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *односвязно.*

### Доказательство.

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.
$\mathbb{S}^{n-1}$ и $\mathbb{R}$ односвязны. $\square$

### Задача

При $n \geq 3$, дополнение любого конечного множества в $\mathbb{R}^n$ односвязно.

$n \geqslant 3$

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ – односв

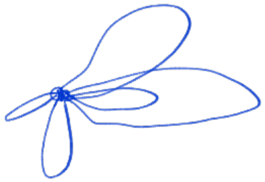
$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$

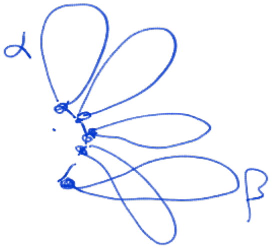
# Содержание

# Свободная гомотопия петель

## Определение

Петли $\alpha \in \Omega(X, p)$ и $\beta \in \Omega(X, q)$ свободно гомотопны, если существует непрерывное семейство $\{\alpha_t\}_{t\in[0,1]}$ петель в $X$ такое, что $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \beta$.
(Т.е. концы не фиксированы, но для каждого $t$ путь является петлёй.)



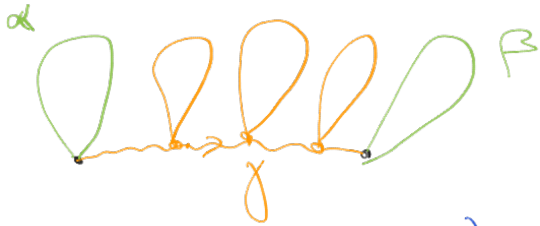


# Свободная гомотопия через гомотопию путей

**Теорема**

*Пусть петли* $\alpha$ *и* $\beta$ *свободно гомотопны,* $\{\alpha_t\}$ — *свободная гомотопия между ними,* $\gamma$ — *путь, определяемый равенством* $\gamma(t) = \alpha_t(0)$.
*Тогда* $\boxed{\beta \sim \gamma^{-1}\alpha\gamma} = T_\gamma(\alpha)$.

$\in T_\gamma([\alpha])$




$[\beta] = T_\gamma([\alpha])$.

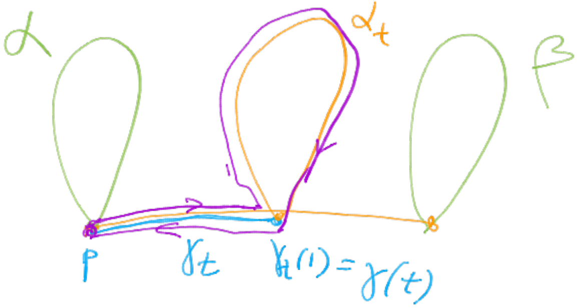
# Свободная гомотопия через гомотопию путей

## Теорема

*Пусть петли $\alpha$ и $\beta$ свободно гомотопны, $\{\alpha_t\}$ — свободная гомотопия между ними, $\gamma$ — путь, определяемый равенством $\gamma(t) = \alpha_t(0)$.*
*Тогда $\boxed{\beta \sim \gamma^{-1}\alpha\gamma} = T_\gamma(\alpha)$.*

## Доказательство.

Докажем эквивалентное: $\boxed{\alpha \sim \gamma\beta\gamma^{-1}}$.
Построим гомотопию путей $\{\varphi_t\}$, $\cancel{\varphi_t = \gamma_t\alpha\gamma_t^{-1}}$, где $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$ с заменой параметра: $\gamma_t(x) = \gamma(tx)$. ☐




$\gamma_t(x) = \gamma(tx)$, $x \in [0,1]$

$\{\varphi_t\}$. $\varphi_t \in \Omega(X, p)$.

$$\boxed{\varphi_t = \gamma_t \alpha_t \gamma_t^{-1}}$$

$(\gamma_0 = \mathrm{const})$

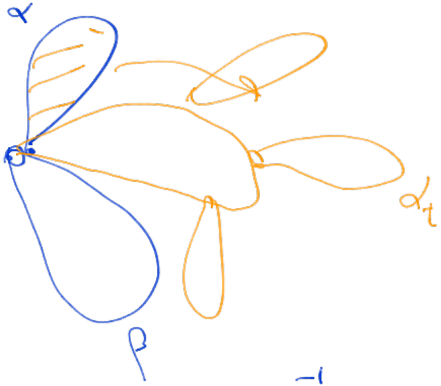
$t = 0 \Rightarrow \varphi_t \sim \alpha$

$t = 1 \Rightarrow \varphi_t = \gamma\beta\gamma^{-1}$

# Следствия

## Следствие

*Петли* $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ *свободно гомотопны* $\iff$ *они представляют сопряжённые элементы* $\pi_1(X, x_0)$.




$$[\alpha] = [\gamma]^{-1}[\beta][\gamma]$$

$[\alpha]$ и $[\beta]$ сопряжены

в $\pi_1(X)$.

# Следствия

## Следствие

*Петли $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ свободно гомотопны $\iff$ они представляют сопряжённые элементы $\pi_1(X, x_0)$.*

## Следствие

*Петля $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ свободно гомотопна постоянной петле $\iff$ она гомотопна постоянной петле (т.е. представляет единицу группы $\pi_1(X, x_0)$).*


$$\alpha \sim \gamma \cdot const_q \cdot \gamma^{-1} \sim \gamma\gamma^{-1} \sim$$
$$\sim const_p.$$

# Следствия

## Следствие

*Петли* $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ *свободно гомотопны* $\iff$ *они представляют сопряжённые элементы* $\pi_1(X, x_0)$.

## Следствие

*Петля* $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ *свободно гомотопна постоянной петле* $\iff$ *она гомотопна постоянной петле (т.е. представляет единицу группы* $\pi_1(X, x_0)$*).*

## Определение

Петли, гомотопные постоянным, называются стягиваемыми.