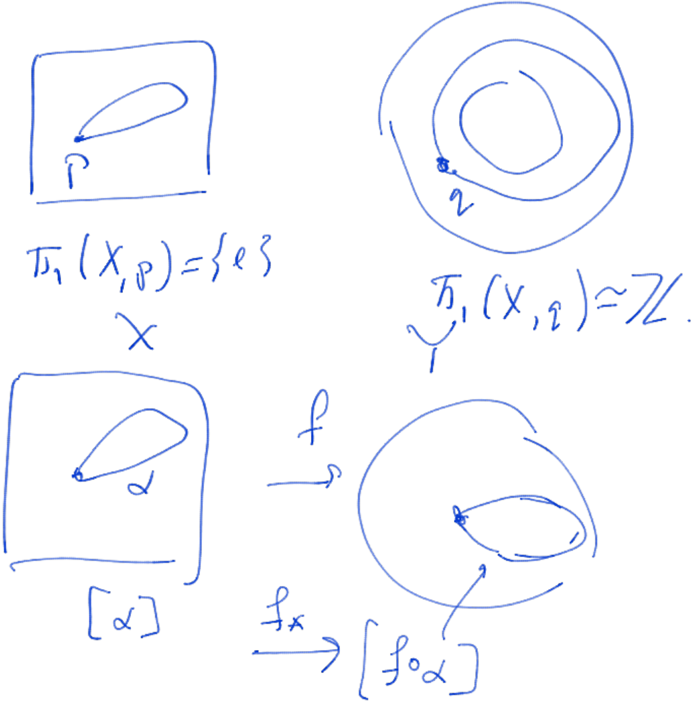
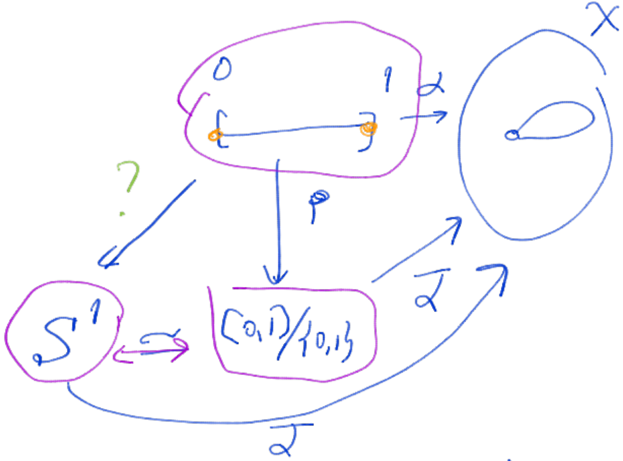
Содержание



Петли как отображения окружности

Зафиксируем стандартный обход окружности
$E\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$:

$$E(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$



Свойство

Пусть X — топологическое пространство.
Любая петля $\alpha\colon [0,1] \to X$ представляется в виде
$\alpha = \overline{\alpha} \circ E$, где $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ — непрерывное отображение.

Это определяет биекцию между множеством петель в X и множеством непрерывных отображений из $\mathbb{S}^1$ в X.

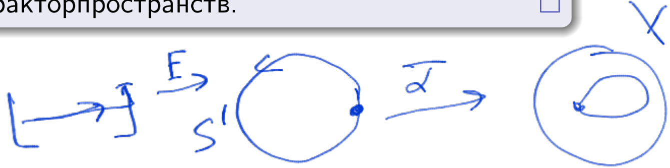
?$\Rightarrow$ $E : [0,1] \to S^1$

$E(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$

$= e^{2\pi i x}$ (6C)

Доказательство.

Из свойств факторпространств. □



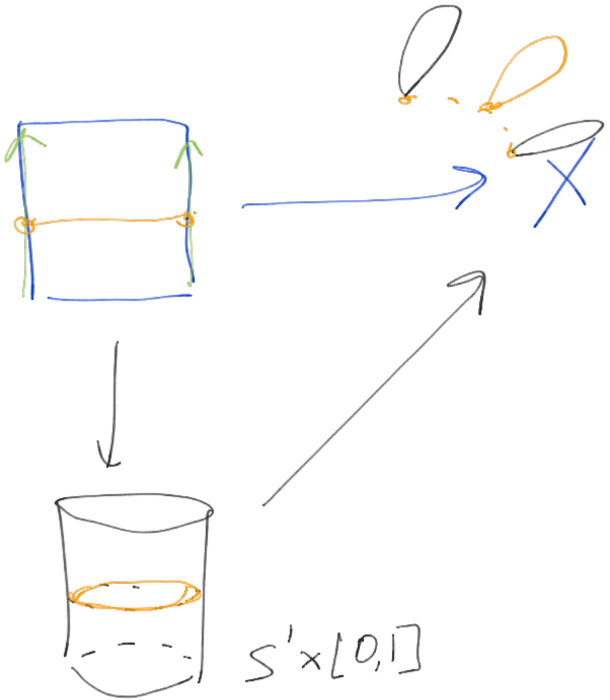
Для записей

Свободные гомотопии и гомотопии отображений окружности

Замечание

Аналогично, свободным гомотопиям петель в X соответствуют гомотопии отображений из $\mathbb{S}^1$ в X.

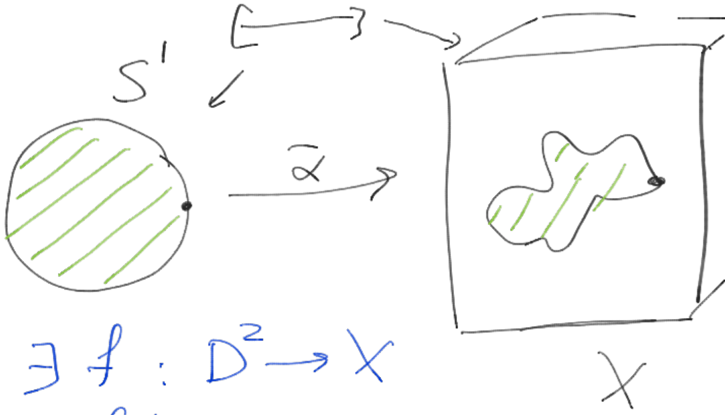
Таким образом, петля $\alpha\colon [0,1] \to X$ стягиваема $\iff$ соответствующее $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ гомотопно постоянному отображению.



Стягиваемость и отображения диска

Теорема

Петля $\alpha\colon [0,1] \to X$ *стягиваема* $\iff$ *соответствующее отображение* $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ *продолжается до непрерывного отображения из* D^2 *в* X
(т.е. существует непрерывное $f\colon D^2 \to X$ *такое, что* $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$*).*



$$\exists f : D^2 \to X$$

$$f\big|_{S^1} = \bar{\alpha}$$

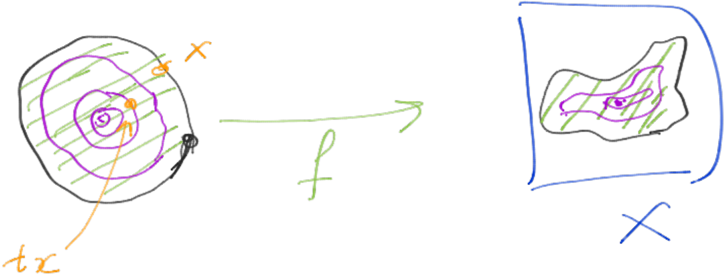
Стягиваемость и отображения диска

Теорема

Петля $\alpha\colon [0,1] \to X$ стягиваема $\iff$ соответствующее отображение $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения из D^2 в X
(т.е. существует непрерывное $f\colon D^2 \to X$ такое, что $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$).

Доказательство.

$\Longleftarrow$: Пусть $f\colon D^2 \to X$ таково, что $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$. Строим гомотопию $\{f_t\}$, $f_t\colon \mathbb{S}^1 \to X$, $f_t(x) = f(tx)$. Она соединяет константу $f(0,0)$ и $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$.



$f: D^2 \to X$

$\overline{\alpha} = f|_{S^1} : S^1 \to X$

Надо: $\overline{\alpha} \sim const$

$(x,t) \mapsto tx$ – гомотопия
между $const_0 : S^1 \to D^2$
и $in : S^1 \to D^2$.

Стягиваемость и отображения диска

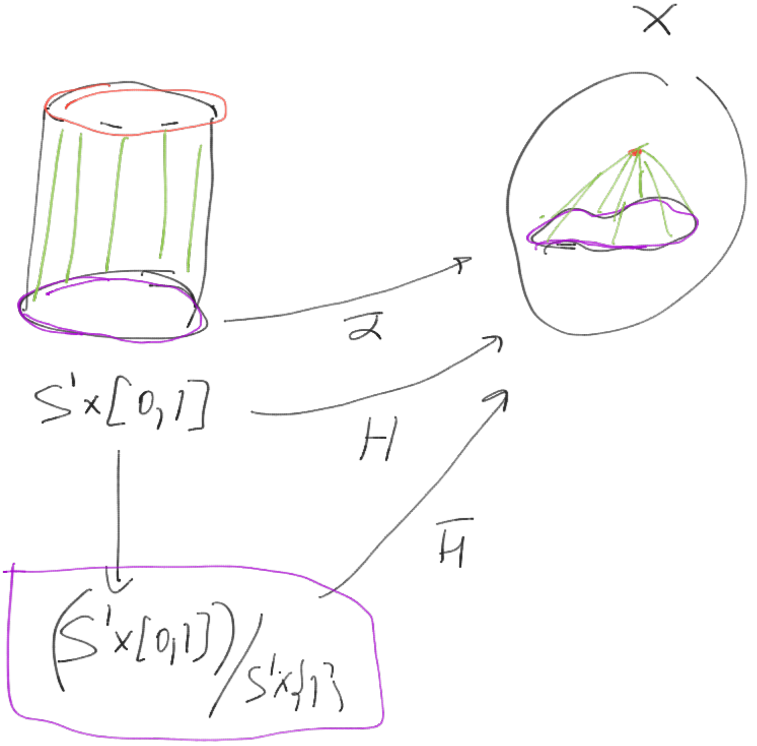
Теорема

Петля $\alpha\colon [0,1] \to X$ *стягиваема* $\iff$ *соответствующее отображение* $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ *продолжается до непрерывного отображения из* D^2 *в* X
(т.е. существует непрерывное $f\colon D^2 \to X$ *такое, что* $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$*).*

Доказательство.

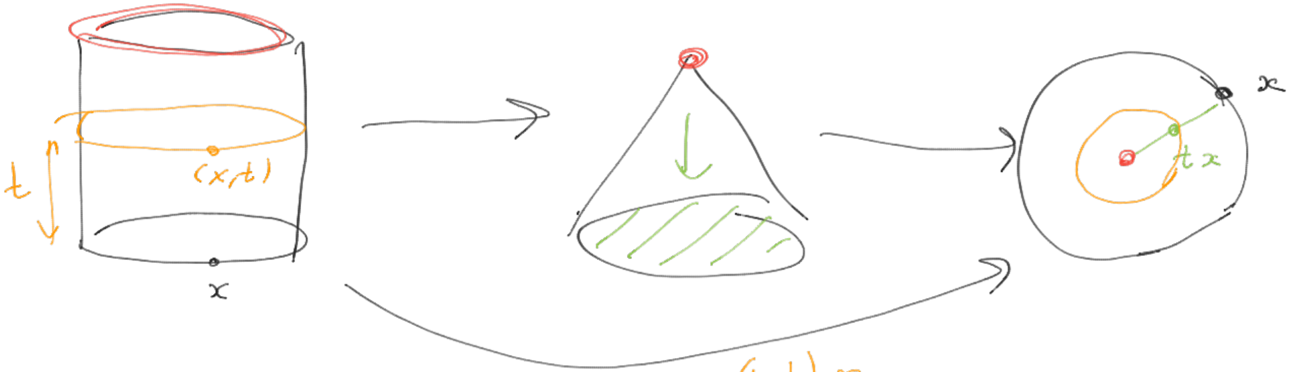
$\Longleftarrow$: Пусть $f\colon D^2 \to X$ таково, что $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$. Строим гомотопию $\{f_t\}$, $f_t\colon \mathbb{S}^1 \to X$, $f_t(x) = f(tx)$. Она соединяет константу $f(0,0)$ и $f|_{\mathbb{S}^1} = \overline{\alpha}$.

$\Longrightarrow$: Пусть $H\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$ — гомотопия между $\overline{\alpha}$ и постоянным отображением: $H(\cdot,0) = \overline{\alpha}$, $H(\cdot,1) = const$. Она пропускается через факторпространство $(\mathbb{S}^1 \times [0,1])/(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$ — цилиндр со стянутым основанием.
Это факторпространство гомеоморфно D^2. □



Для записей

$$(S^1 \times [0,1]) / (S^1 \times \{1\}) \simeq D^2$$



$$(x,t) \longmapsto (1-t)\cdot x$$

Итог: переформулировки стягиваемости петли

Следующие свойства петли $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ равносильны (и могут называться стягиваемостью):

1. $[\alpha]$ — единица группы $\pi_1(X, x_0)$ ✓
2. α гомотопна постоянной петле (гомотопией с фиксированными концами) ✓
3. α свободна гомотопна постоянной петле
4. $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ гомотопно постоянному отображению из $\mathbb{S}^1$ в X
5. $\overline{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения из D^2 в X.

Следствие

Линейно связное пространство X односвязно $\iff$ каждая петля в нём удовлетворяет перечисленным свойствам.

Содержание

Стягиваемость петель и гомотопность путей

Свойство

Пусть α, β — пути с общими концами: $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$. Тогда

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha\beta^{-1} \text{ — стягиваемая петля}$$

Стягиваемость петель и гомотопность путей

Свойство

Пусть α, β — пути с общими концами: $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$. Тогда

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha\beta^{-1} \text{ — стягиваемая петля}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: $\alpha \sim \beta \implies \alpha\beta^{-1} \sim \beta\beta^{-1} \sim const.$ V

$\Longleftarrow$: $\underbrace{\alpha\beta^{-1} \sim const} \implies \underbrace{\alpha\beta^{-1}\beta \sim const \cdot \beta} \implies \alpha \sim \beta.$ □

$\Rightarrow$

$\alpha \sim \beta$

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha\beta^{-1} \sim \beta\beta^{-1}} \sim const.$

$\Leftarrow$

Итог: переформулировки односвязности

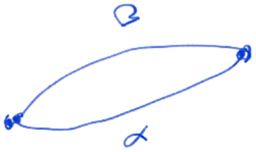
Теорема

Для линейно связного пространства X следующие свойства эквивалентны:

1. $\pi_1(X) = \{e\}$ *(определение односвязности)*
2. *Любая петля гомотопна постоянной.*
3. *Любая петля свободно гомотопна постоянной.*
4. *Любое непрерывное отображение из S^1 в X гомотопно постоянному.*
5. *Любое непрерывное отображение из S^1 в X продолжается до непрерывного отображения из D^2 в X.*
6. *Любые два пути с общими концами гомотопны.*

Доказательство — из предыдущих свойств.

$1 \Rightarrow 6$



$\alpha\beta^{-1} \sim const$

$6 \Rightarrow 1.$

$\alpha \sim const.$

Содержание

Определение накрытия

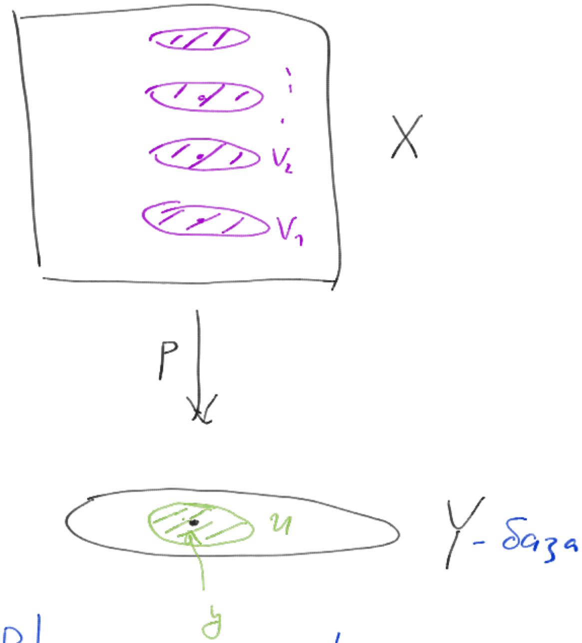
Пусть X, Y — топологические пространства,
$p\colon X \to Y$ — непрерывное отображение.

Определение

p — накрытие, если у любой точки $y \in Y$ есть окрестность $U \ni y$ такая, что:

$p^{-1}(U)$ представляется в виде дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{i\in I} V_i$,
где $V_i \subset X$ — открытые множества такие, что для каждого i сужение $p|_{V_i}$ — гомеоморфизм между V_i и U.

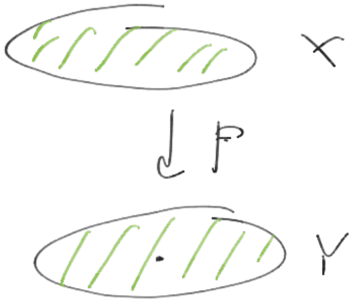
Термины:
X — накрывающее пространство;
Y — база накрытия;
U — правильно накрываемая окрестность;
V_i — правильно накрывающая окрестность (нестандартный термин);
p иногда называют проекцией накрытия.



$P|_{V_i}$ — гомеоморфизм из V_i и U.

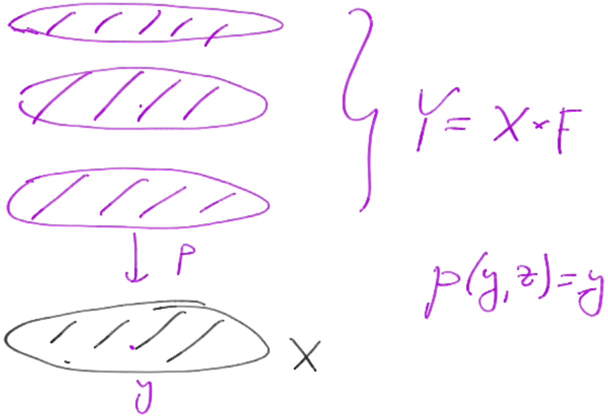
Примеры накрытий

- Любой гомеоморфизм — накрытие.



Примеры накрытий

- Любой гомеоморфизм — накрытие.
- Пусть F — дискретное пространство, $X = Y \times F$, p — первая координатная проекция.

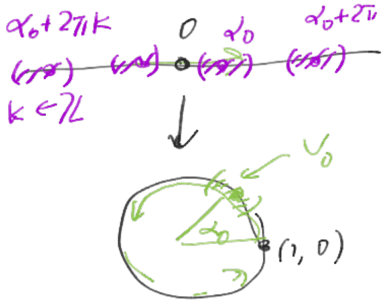


Примеры накрытий

- Любой гомеоморфизм — накрытие.
- Пусть F — дискретное пространство, $X = Y \times F$, p — первая координатная проекция.
- Намотка прямой на окружность. $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, заданное формулой

$$p(x) = (\cos x, \sin x)$$

Или, отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, $p(x) = e^{ix}$.



$X = \mathbb{R}$

$Y = S^1$

$V_0 = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$

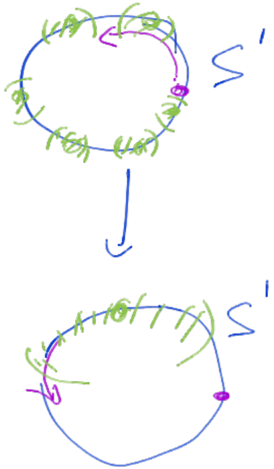
$U = \{ v \in S^1 : \angle(v, v_0) < \frac{\pi}{10} \}$

Примеры накрытий

- Любой гомеоморфизм — накрытие.
- Пусть F — дискретное пространство, $X = Y \times F$, p — первая координатная проекция.
- Намотка прямой на окружность. $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, заданное формулой

$$p(x) = (\cos x, \sin x)$$

  Или, отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, $p(x) = e^{ix}$.
- n-кратная намотка окружности на себя. $p\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, заданное комплексной формулой $p(z) = z^n$.



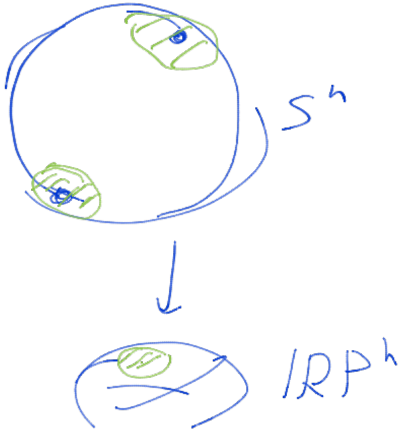
Примеры накрытий

- Любой гомеоморфизм — накрытие.
- Пусть F — дискретное пространство, $X = Y \times F$, p — первая координатная проекция.
- Намотка прямой на окружность. $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, заданное формулой

$$p(x) = (\cos x, \sin x)$$

  Или, отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, $p(x) = e^{ix}$.
- *n*-кратная намотка окружности на себя. $p\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, заданное комплексной формулой $p(z) = z^n$.
- Стандартная проекция (факторизация) $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$.

$\mathbb{R}P^n = S^n/-$



Примеры накрытий

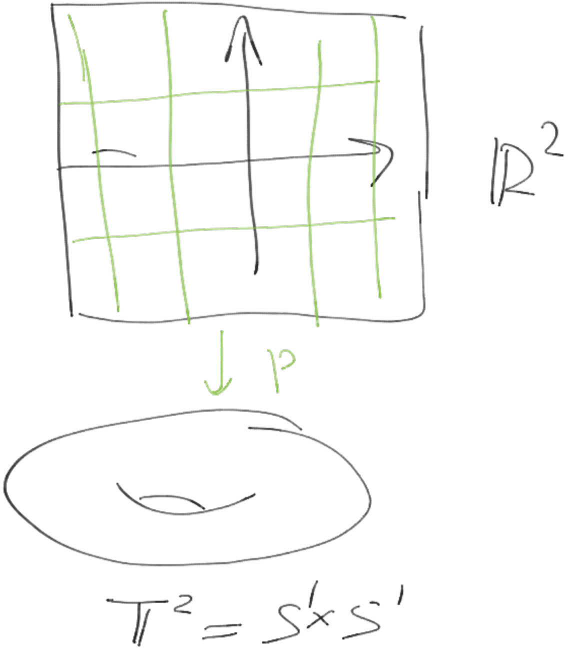
- Любой гомеоморфизм — накрытие.
- Пусть F — дискретное пространство, $X = Y \times F$, p — первая координатная проекция.
- Намотка прямой на окружность. $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, заданное формулой

$$p(x) = (\cos x, \sin x)$$

  Или, отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, $p(x) = e^{ix}$.
- *n*-кратная намотка окружности на себя. $p\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, заданное комплексной формулой $p(z) = z^n$.
- Стандартная проекция (факторизация) $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$.
- $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, заданное формулой

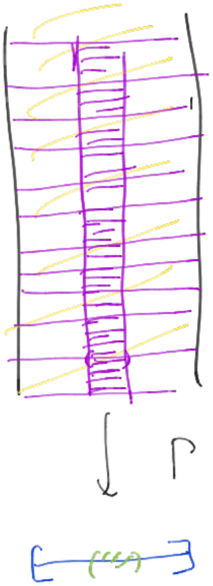
$$p(x, y) = (e^{ix}, e^{iy}), \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

  где $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ отождествлено с подмножеством $\mathbb{C}^2$.



Примеры не накрытий

- Рассмотрим $Y = [0,1]$, $X = Y \times \mathbb{R}$, p — первая координатная проекция.
  Это не накрытие. Хотя X разбивается на слои вида $X \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, эти слои не открыты.



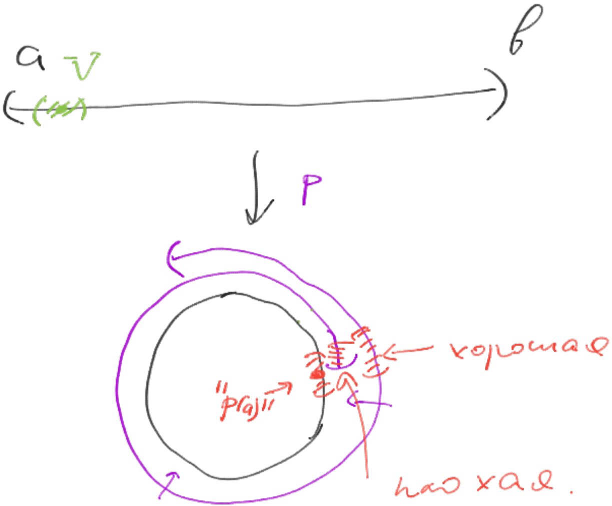
$X = Y \times \mathbb{R}$

$p(y,z) = y$
$z \in \mathbb{R}$.

$Y = [0,1]$

Примеры не накрытий

- Рассмотрим $Y = [0, 1]$, $X = Y \times \mathbb{R}$, p — первая координатная проекция.
  Это не накрытие. Хотя X разбивается на слои вида $X \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, эти слои не открыты.
- Пусть $X = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$,
  p задано формулой $p(x) = (\cos x, \sin x)$.
  Это локальный гомеоморфизм, но не накрытие.
  Точка $y = e^{ia}$ не имеет правильно накрываемой окрестности.



Замечание

Отображение $f : X \to Y$ называется локальным гомеоморфизмом, если у любой точки $x \in X$ есть окрестность $V \ni x$ такая, что $f(V)$ открыто в Y и $f|_V$ — гомеоморфизм между V и $f(V)$.

Любое накрытие — локальный гомеоморфизм, но не наоборот.

Задача. X - компактно. X, Y - метризуемо $\Rightarrow$ $\forall$ лок. гомеом. $f: X \to Y$ - накрытие.

Число листов накрытия

$p: X \to Y$ — накр., Y — связно.

Теорема

Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие и Y связно. Тогда $|p^{-1}(y)|$ (количество прообразов точки) одинаково у всех точек.

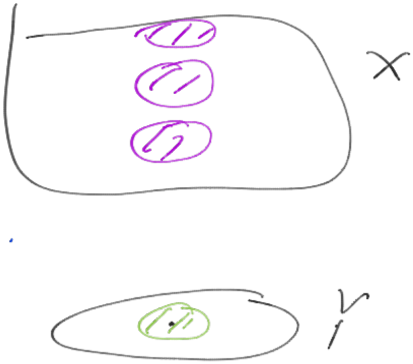
Утв. $y \mapsto |f^{-1}(y)|$ —

$Y \to \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$

— константа.

Доказательство.

$y \mapsto |p^{-1}(y)|$ — локально постоянная функция из Y в $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.
На связном пространстве любая локально постоянная функция постоянна. $\square$



$f: Y \to \mathbb{N} \cup \ldots$

$f(y) = |f^{-1}(y)|$

$\forall y \in Y\ \exists$ окр $U \ni y$: $f|_U = \mathrm{const}$.

(f — лок. постоянно)

Число листов накрытия

Теорема

Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие и Y связно. Тогда $|p^{-1}(y)|$ (количество прообразов точки) одинаково у всех точек.

Доказательство.

$y \mapsto |p^{-1}(y)|$ — локально постоянная функция из Y в $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.
На связном пространстве любая локально постоянная функция постоянна. $\square$

Далее будем рассматривать только накрытия, у которых база линейно связна.

Определение

Количество прообразов точки называется **числом листов** накрытия.
Если оно равно 1, 2,..., ∞, то накрытие называется **однолистным**, **двулистным**, ..., **бесконечно-листным**.

Лемма. Y — связно
$f: Y \to Z$ лок. пост.
$\Rightarrow f = \mathrm{const}$.

Д: f - лок пост $\Leftrightarrow \forall z \in Z$
$f^{-1}(z)$ — открыт.
$Y = \bigsqcup_{z\in Z} f^{-1}(z)$
$\Rightarrow$ все кроме одного $= \varnothing$. $\boxtimes$

Определение

Накрытие называется универсальным, если накрывающее пространство односвязно.

X — односвязн.

$\Big(\mathbb{R} \to S^1,$

$S^n \to \mathbb{R}P^n, \quad n \geqslant 2,$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 \Big).$

Содержание

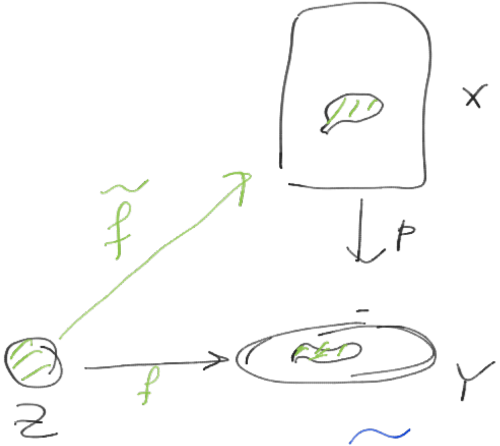
Поднятия

Определение

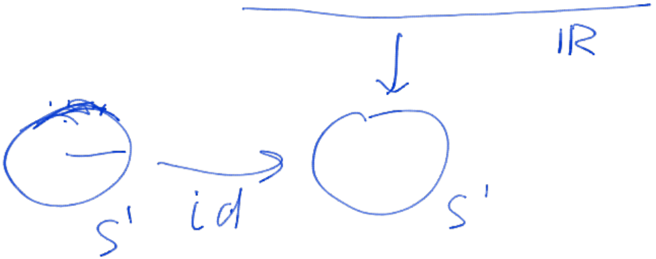
Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие, Z — топологическое пространство, $f\colon Z \to Y$ — непрерывное отображение. Поднятие f — отображение $\widetilde{f}\colon Z \to X$ такое, что $f = p \circ \widetilde{f}$.

Замечание

Поднятие не всегда существует. Например, $\mathrm{id}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ не имеет поднятия относительно стандартной намотки $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ (упражнение).



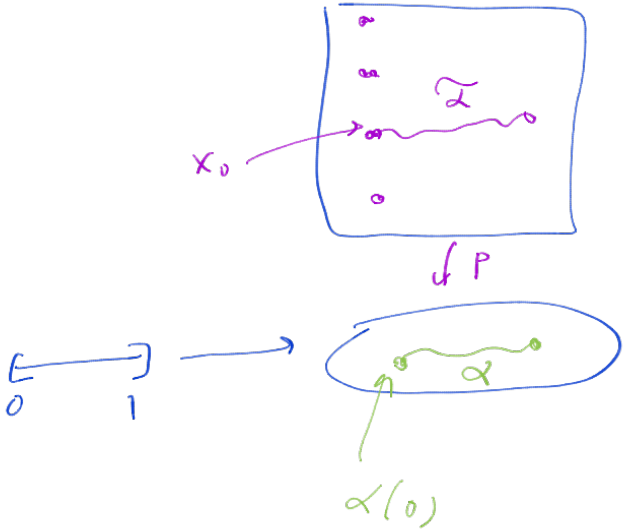
$f = p \circ \tilde{f}$



Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие.

Теорема

Для любого пути $\alpha\colon [0,1] \to Y$ и любой точки $x_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$ существует единственное поднятие $\widetilde{\alpha}$ пути α такое, что $\widetilde{\alpha}(0) = x_0$.



Доказательство — 1: существование

Покроем Y правильно накрываемыми окрестностями и применим лемму Лебега: существует такое $\delta > 0$, что α-образ любого интервала длины δ лежит в одной из правильно накрываемых окрестностей.

Разобьем $[0,1]$ точками $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_N = 1$ на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$ с длинами меньше δ.
Поднятие будем строить по индукции: сначала на $[t_0, t_1]$, потом на $[t_1, t_2]$ и т. д.

Как построить $\widetilde{\alpha}|_{[t_0,t_1]}$: Пусть U_0 — правильно накрываемая окрестность, содержащая $\alpha(t_0)$, V_0 — окрестность точки y_0, правильно накрывающая $\alpha(t_0)$.
Определяем $\widetilde{\alpha}(t) = (p|_{V_0})^{-1}(\alpha(t))$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

На $[t_1, t_2]$ достраиваем $\widetilde{\alpha}$ аналогично, начиная с уже построенной точки $\alpha(t_1)$ вместо y_0.

И так далее.