Содержание

Определение накрытия (повтор)

Пусть X, Y — топологические пространства,
$p\colon X \to Y$ — непрерывное отображение.

Определение

p — накрытие, если у любой точки $y \in Y$ есть окрестность $U \ni y$ такая, что:

$p^{-1}(U)$ представляется в виде дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{i\in I} V_i$,
где $V_i \subset X$ — открытые множества такие, что для каждого i сужение $p|_{V_i}$ — гомеоморфизм между V_i и U.

Термины:
X — накрывающее пространство;
Y — база накрытия;
U — правильно накрываемая окрестность;
V_i — правильно накрывающая окрестность (нестандартный термин);
p иногда называют проекцией накрытия.

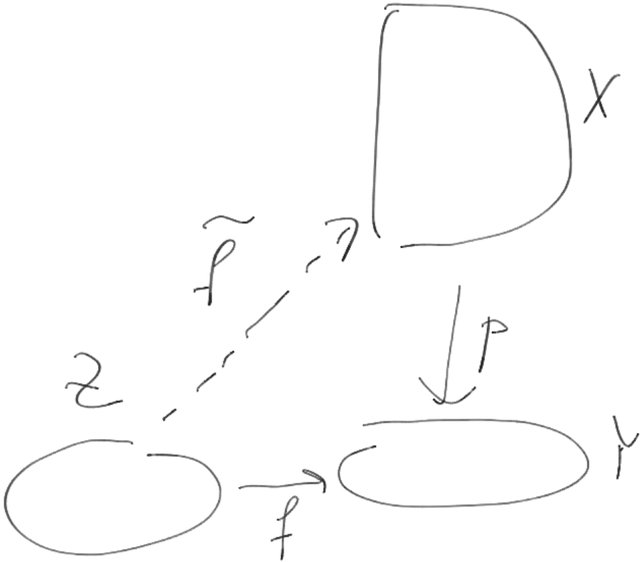
Поднятия (повтор)

Определение

Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие, Z — топологическое пространство, $f\colon Z \to Y$ — непрерывное отображение. Поднятие f — отображение $\widetilde{f}\colon Z \to X$ такое, что $f = p \circ \widetilde{f}$.

Замечание

Поднятие не всегда существует. Например, $\mathrm{id}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ не имеет поднятия относительно стандартной намотки $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ (упражнение).



Теорема о поднятии пути

Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие.

Теорема

Для любого пути $\alpha\colon [0,1] \to Y$ *и любой точки* $x_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$ *существует единственное поднятие* $\widetilde{\alpha}$ *пути* α *такое, что* $\widetilde{\alpha}(0) = x_0$.

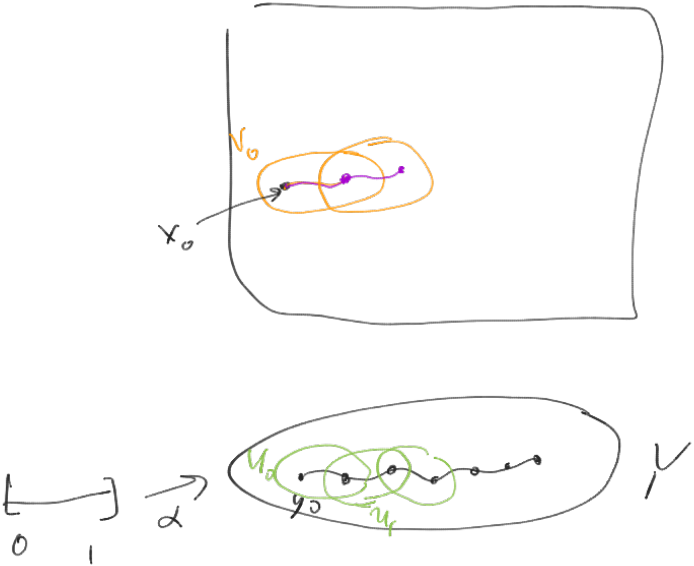
Покроем Y правильно накрываемыми окрестностями и применим лемму Лебега: существует такое $\delta > 0$, что α-образ любого интервала длины δ лежит в одной из правильно накрываемых окрестностей.

Разобьем $[0,1]$ точками $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_N = 1$ на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$ с длинами меньше δ.
Поднятие будем строить по индукции: сначала на $[t_0, t_1]$, потом на $[t_1, t_2]$ и т. д.

Как построить $\widetilde{\alpha}|_{[t_0,t_1]}$: Пусть U_0 — правильно накрываемая окрестность, содержащая $\alpha(t_0)$, V_0 — окрестность точки y_0, правильно накрывающая $\alpha(t_0)$.
Определяем $\widetilde{\alpha}(t) = (p|_{V_0})^{-1}(\alpha(t))$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

На $[t_1, t_2]$ достраиваем $\widetilde{\alpha}$ аналогично, начиная с уже построенной точки $\widetilde{\alpha}(t_1)$ вместо y_0.

И так далее.



Доказательство — 2: единственность

Единственность следует из конструкции — докажем, что любое поднятие $\widetilde{\alpha}$ с $\widetilde{\alpha}(0) = y_0$ совпадает с построенным. Докажем это для первого участка $\widetilde{\alpha}|_{[t_0,t_1]}$, далее аналогично по индукции.

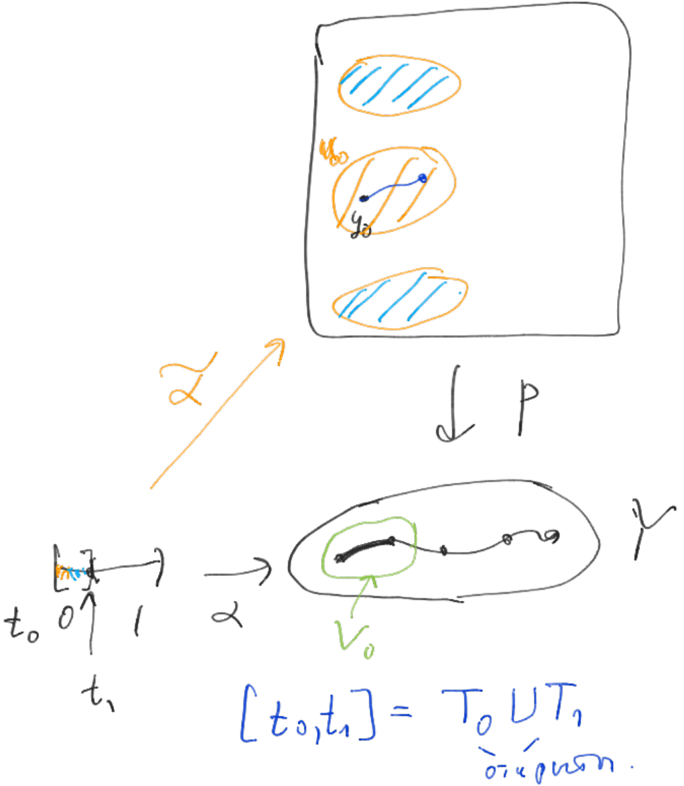
Достаточно доказать, что $\widetilde{\alpha}([t_0, t_1]) \subset U_0$ (в обозначениях из доказательства существования). Предположим противное и рассмотрим множества

$$T_0 = \{t \in [t_0, t_1] : \widetilde{\alpha}_1(t) \in U_0\},$$

$$T_1 = \{t \in [t_0, t_1] : \widetilde{\alpha}_1(t) \notin U_0\},$$

Из непрерывности $\widetilde{\alpha}$ и определения накрытия T_0 и T_1 открыты в $[t_0, t_1] \implies$ противоречие со связностью отрезка $[t_0, t_1]$.

Теорема доказана



Лемма о непрерывном аргументе

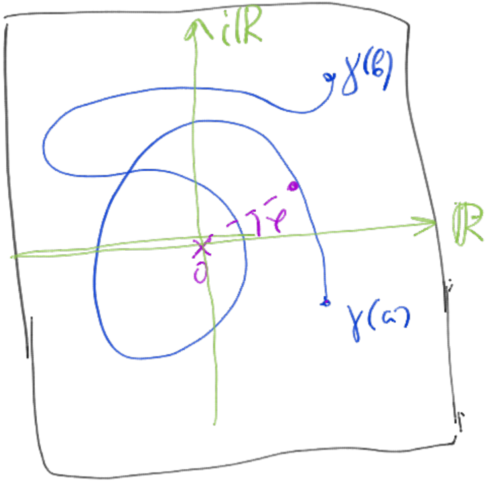
Следствие (Лемма о непрерывном аргументе)

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *непрерывно. Тогда*

- *Существует непрерывная функция* $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} \qquad \forall t \in [a,b]$$

- *Такая* φ *единственна с точностью до прибавления константы, кратной* 2π.



$[a,b] \to [0,1]$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$e^{i\varphi} \cong (\cos\varphi, \sin\varphi)$

Следствие (Лемма о непрерывном аргументе)

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *непрерывно. Тогда*

- *Существует непрерывная функция* $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} \qquad \forall t \in [a,b]$$

- *Такая* φ *единственна с точностью до прибавления константы, кратной* 2π.

Доказательство.

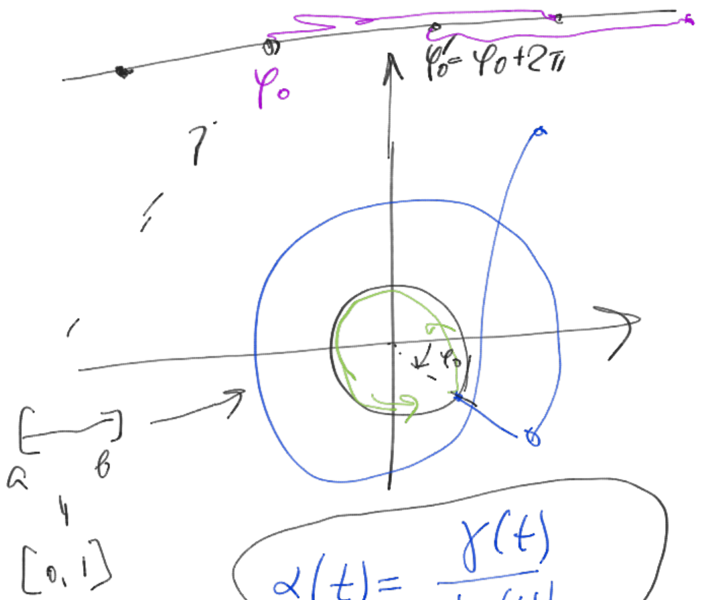
Применим теорему о поднятии пути к накрытию $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(x) = e^{ix}$, и пути $\alpha(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ в $\mathbb{S}^1$. □

$X = \mathbb{R}$

$Y = S^1$

$p : \mathbb{R} \to S^1$

$p(x) = e^{ix}$



$\alpha(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$

$\alpha : [a,b] \to S^1$

$\{\alpha_t\}$ – своб. гомотопия петель в $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

$\overline{\alpha}_t : [0,1] \to S^1$

$\overline{\alpha}_t(x) = \dfrac{\alpha_t(x)}{|\alpha_t(x)|}$

$p : \mathbb{R} \to S^1$

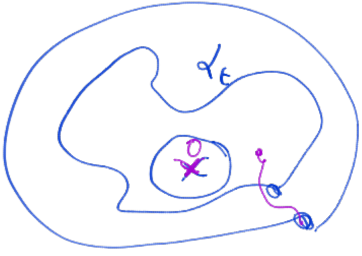
$p(x) = (\cos x, \sin x)$

1) I – непр.

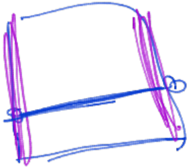
2) $I(t) \in \mathbb{Z}$ $\forall t$

$\Downarrow$

$I = const$



$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$.



φ_t – непр. ор.

α_t

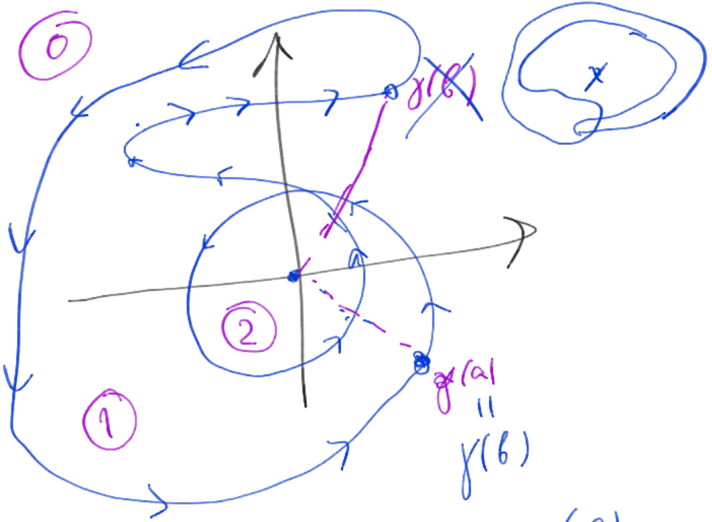
$I : t \mapsto \dfrac{\varphi_t(1) - \varphi_t(0)}{2\pi}$

Замечание

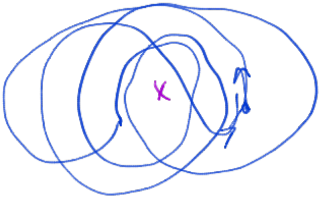
Из единственности непрерывного аргумента с точностью до прибавления константы следует, что **изменение аргумента** $\varphi(b) - \varphi(a)$ корректно определено (не зависит от выбора φ).

Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то изменение аргумента кратно 2π, то есть $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. Это целое число называется **индексом** петли γ относительно 0.

Аналогично (с помощью параллельного переноса на $-p$) определяется индекс петли относительно произвольной точки $p \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, не лежащей в множестве значений γ.



$$\mathrm{ind}_0(\gamma) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$



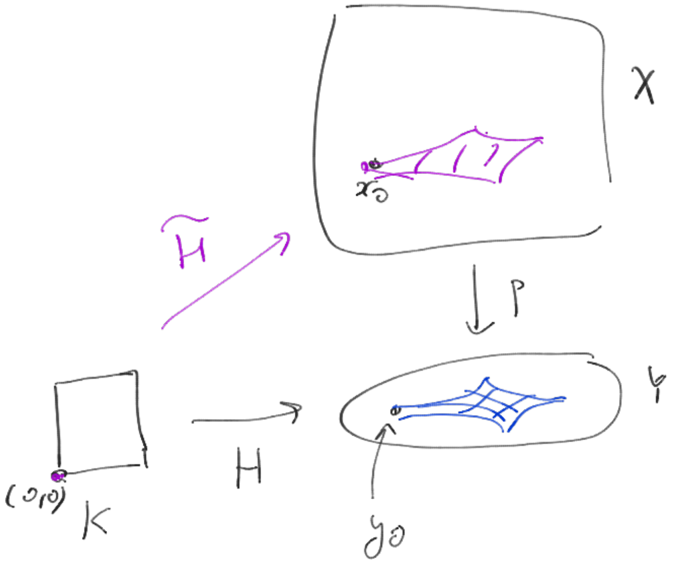
Содержание

Формулировка

Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие.
Обозначим $K = [0,1] \times [0,1]$.

Теорема

*Пусть $H\colon K \to Y$ — непрерывное отображение, $y_0 = H(0,0)$, $x_0 \in p^{-1}(y_0)$.
Тогда существует единственное поднятие $\widetilde{H}\colon K \to \cancel{Y}\,X$ отображения H такое, что $\widetilde{H}(0,0) = x_0$.*

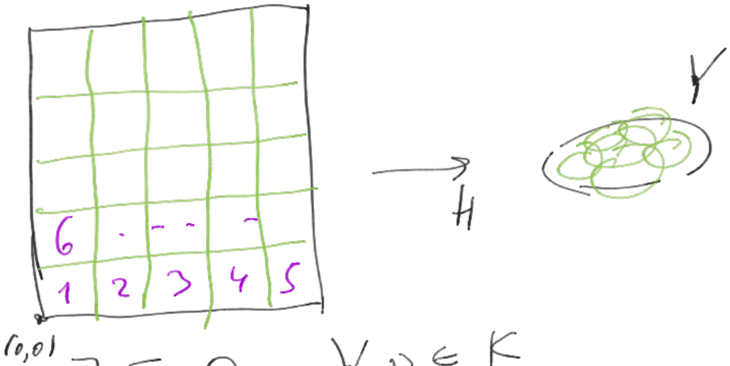


$p(x_0) = y_0$

Доказательство (план)

По лемме Лебега, существует такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара лежит в правильно накрываемой окрестности.

Разобьем K на одинаковые квадратики диаметра меньше δ.
Строим $\widetilde{H}$ по очереди на каждом квадратике, перечисляя их слева направо и снизу вверх (аналогично поднятию пути).



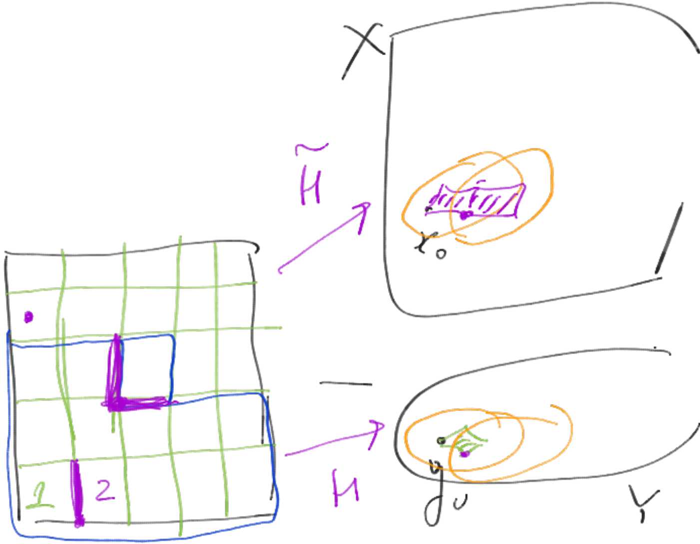
$\exists\, \delta > 0 . \ \forall p \in K$
$H(B_\delta(p))$ лежит в
прав. накр. окр-ти.

Доказательство (план)

По лемме Лебега, существует такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара лежит в правильно накрываемой окрестности.

Разобьем K на одинаковые квадратики диаметра меньше δ.
Строим $\widetilde{H}$ по очереди на каждом квадратике, перечисляя их слева направо и снизу вверх (аналогично поднятию пути).

На каждом очередном шагу пересечение нового квадратика с теми, на которых $\widetilde{H}$ уже построено, линейно связно $\implies$ по единственности поднятия пути поднятие на квадратике будет совпадать с ранее построенным на общей части.



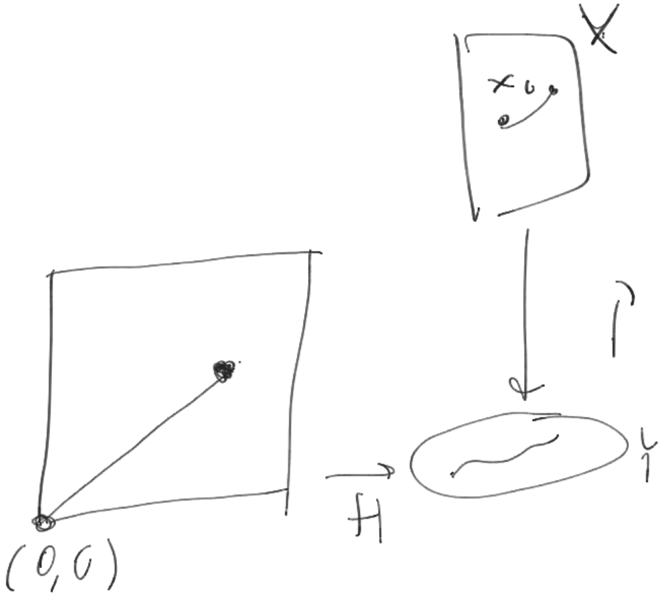
Доказательство (план)

По лемме Лебега, существует такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара лежит в правильно накрываемой окрестности.

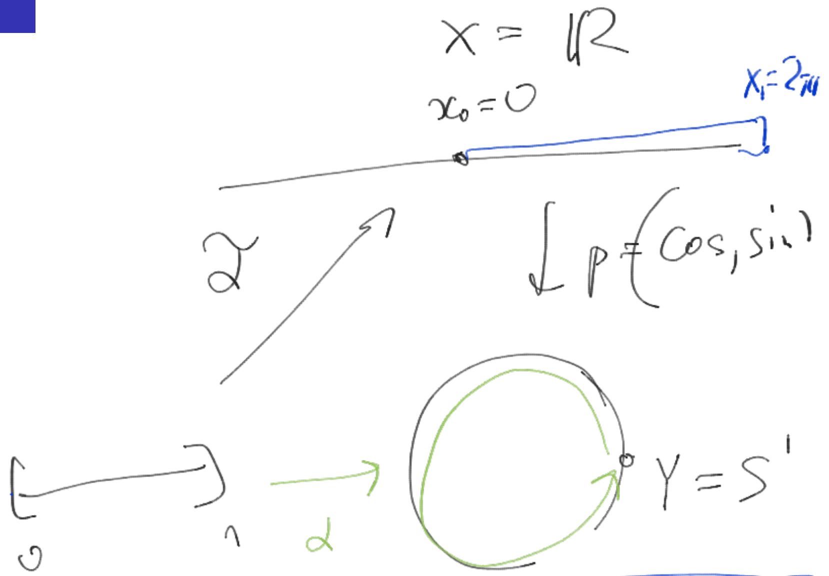
Разобьем K на одинаковые квадратики диаметра меньше δ.
Строим $\widetilde{H}$ по очереди на каждом квадратике, перечисляя их слева направо и снизу вверх (аналогично поднятию пути).

На каждом очередном шагу пересечение нового квадратика с теми, на которых $\widetilde{H}$ уже построено, линейно связно $\implies$ по единственности поднятия пути поднятие на квадратике будет совпадать с ранее построенным на общей части.

Единственность $\tilde{H}$ следует из линейной связности K и единственности поднятия пути.



$$\tilde{\alpha}(x) = 2\pi x$$



$$\boxed{\alpha(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)}$$

Следствия для путей

Следствие

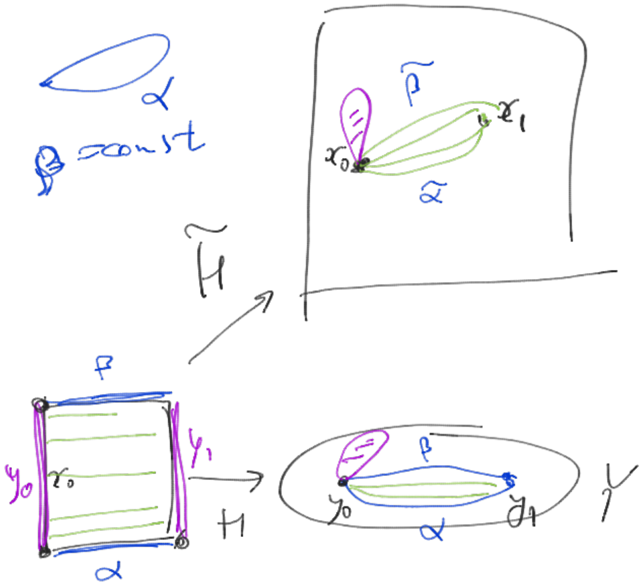
Если пути α, β в Y гомотопны как пути (т.е. с фиксированными концами), то их поднятия с общим началом тоже гомотопны как пути.
В частности, у поднятий совпадают концы.

Следствие

Поднятие стягиваемой петли — тоже петля, причём стягиваемая.

Термин: «петля не размыкается при поднятии».

$$x_1 := \tilde{H}(1,0)$$
$$p(x_1) = y_1$$
$$\tilde{H}\big|_{\text{прав.}} = \mathrm{const}_{x_1}$$



$$\tilde{H}\big|_{\text{лев. сторона}} = \mathrm{const}_{x_0}$$

Следствия для индекса относительно точки

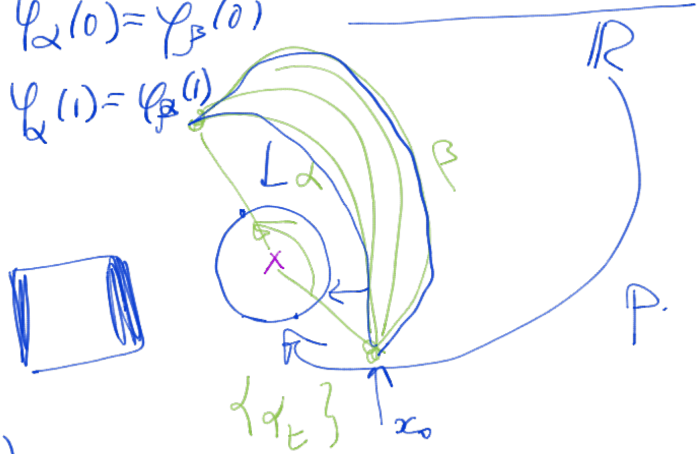
Следствие

1. *Если два пути в* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *гомотопны с фиксированными концами, то изменение аргумента у них одно и то же.*

2. *Если две петли в* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *свободно гомотопны, то их индексы относительно 0 одинаковы.*

$\varphi_\alpha(0)=\varphi_\beta(0)$

$\varphi_\alpha(1)=\varphi_\beta(1)$



Изм. арг $\beta = \varphi_\beta(1) - \varphi_\beta(0)$

$\exists\ \tilde{H} : K \to \mathbb{R}$

$\tilde{H}|_{(\cdot,0)} = \varphi_\alpha$ $\qquad \tilde{H}|_{(0,\cdot)} = \mathrm{const}$

$\tilde{H}(\cdot,1) = \varphi_\beta$ $\qquad \tilde{H}(1,\cdot) = \mathrm{const}.$

Изм. арг. $\alpha = \varphi_\alpha(1) - \varphi_\alpha(0)$

φ_α — непр. аргумент α —

— поднятие α в

накрытие $p = (\cos, \sin)$

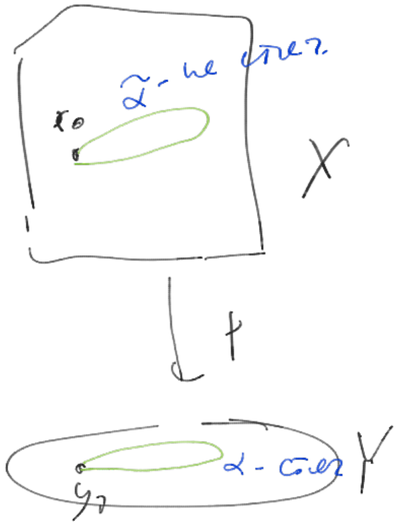
Группа накрытия

Следствие

Гомоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, *индуцированный накрытием* $p : X \to Y$, *— мономорфизм (т.е. инъективен).*

Доказательство.

Если p_* имеет нетривиальное ядро, то поднятие некоторой стягиваемой петли нестягиваемо. Противоречие. $\square$



Группа накрытия

Следствие

Гомоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, *индуцированный накрытием* $p : X \to Y$, *— мономорфизм (т.е. инъективен).*

Доказательство.

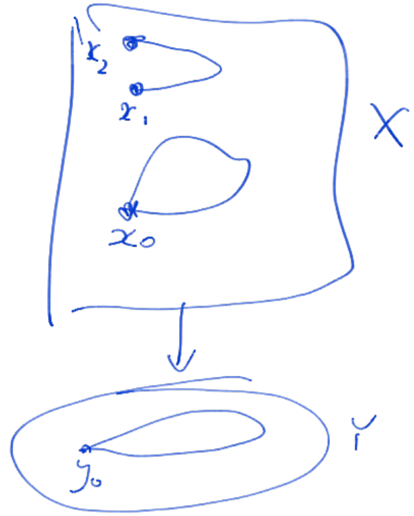
Если p_* имеет нетривиальное ядро, то поднятие некоторой стягиваемой петли нестягиваемо. Противоречие. □

Определение

Образ p_* в $\pi_1(Y, y_0)$ — группа накрытия.

Замечание

1. Группа накрытия состоит из петель, не размыкающихся при поднятии.
2. Она может зависеть от выбора $x_0 \in X$.



$p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$

$Im\,(p_*) \subset \pi_1(Y, y_0)$

$\wr\!\!\!\wr\ \pi_1(X, x_0)$

Содержание

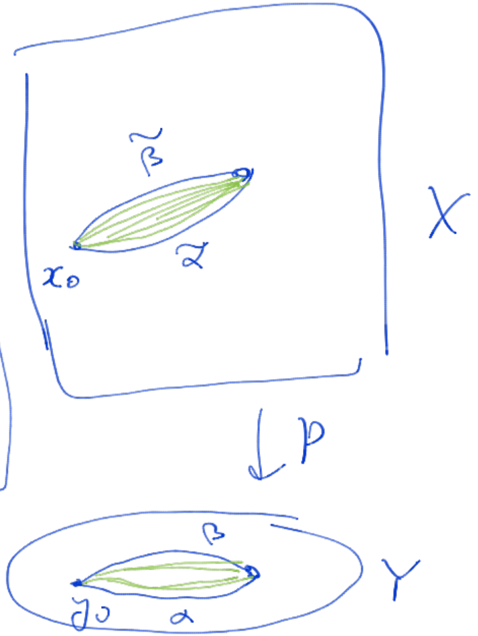
Поднятия в универсальное накрывающее

Пусть $p\colon X \to Y$ — универсальное накрытие.
Зафиксируем $y_0 \in Y$ и $x_0 \in p^{-1}(y_0)$.
Будем рассматривать только пути с началом y_0 и их поднятия с началом x_0.

Теорема

Для универсального накрытия верно следующее:
Пути α, β с началом x_0 гомотопны $\iff$ их поднятия с началом x_0 заканчиваются в одной точке.
(В частности, стягиваемые петли — те и только те, которые не размыкаются при поднятии.)

$\alpha \sim \beta$
$\Updownarrow$
$\tilde\alpha(1) = \tilde\beta(1)$



Доказательство.

$\Longrightarrow$: было (верно для любого накрытия).

$\Longleftarrow$: в односвязном X любые два пути с общими концами гомотопны.
Возьмём гомотопию между $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ и рассмотрим её композицию с p. Получим гомотопию между α и β. □

$p: X \to Y$ — унив.

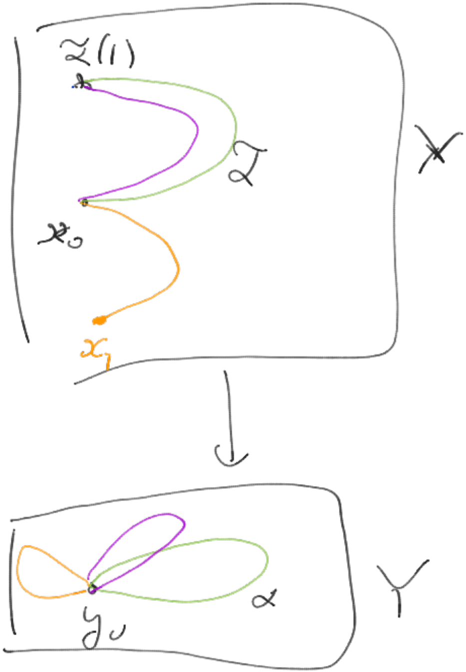
Соответствие между фундаментальной группой и листами универсального накрытия

Теорема

Пусть $p\colon X \to Y$ — универсальное накрытие, $y_0 \in Y$, $x_0 \in p^{-1}(y_0)$.
Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(Y, y_0)$ конец её поднятия в X с началом в x_0.
*Это соответствие определяет **биекцию** между $\pi_1(Y, y_0)$ и $p^{-1}(y_0)$.*

Доказательство.

Это переформулировка предыдущей теоремы. □



Содержание

Фундаментальная группа $\mathbb{RP}^n$

Теорема

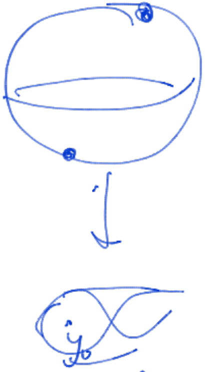
$\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$ *при* $n \geq 2$.

Доказательство.

Из универсального накрытия $\mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ следует, что $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ состоит из двух элементов. Такая группа единственна с точностью до изоморфизма. □

$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

$$\begin{array}{c} S^n \\ p \downarrow \\ \mathbb{RP}^n \end{array}$$



$$|p^{-1}(y_0)| = 2$$
$$\Downarrow$$
$$|\pi_1(\mathbb{RP}^n)| = 2$$

1) p – накр
2) S^n – односв. } $\Rightarrow$ p – унив. накр.

$\exists$ биекция $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \leftrightarrow p^{-1}(y_0)$

Содержание

Фундаментальная группа окружности

Теорема

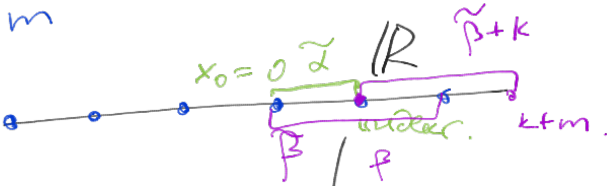
$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.
При изоморфизме элементу $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ соответствует индекс петли (относительно центра окружности).

Доказательство.

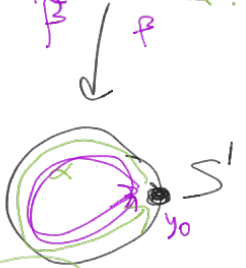
Рассмотрим универсальное накрытие $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ и $y_0 = (1, 0)$.
Оно даёт биекцию между $\pi_1(\mathbb{S}^1, y_0)$ и $p^{-1}(y_0) = \mathbb{Z}$, эта биекция ставит в соответствие каждой петле из $\Omega(\mathbb{S}^1, y_0)$ её индекс.
Нетрудно проверить, что эта биекция переводит произведение петель в сумму целых чисел. □

$\tilde{\alpha}(1) = k$

$\tilde{\beta}(1) = m$



$\widetilde{(\alpha\beta)} = k+m$



$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$

– унив. накр.

$y_0 = (1, 0)$

$p^{-1}(y_0) = \mathbb{Z}$.

Фундаментальная группа проколотой плоскости

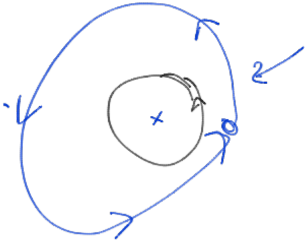
Следствие

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$.
При изоморфизме элементу $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ *соответствует индекс петли относительно 0.*

Доказательство.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$, изоморфизм сохраняет индекс. □

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$$



соотв. $1 \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \overset{\text{гомео}}{\simeq} S^1 \times (0, +\infty)$$

$$x \longmapsto \left(\frac{x}{|x|}, |x| \right).$$

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^1) \times \underbrace{\pi_1((0, +\infty))}_{= \{e\}}.$$