Содержание

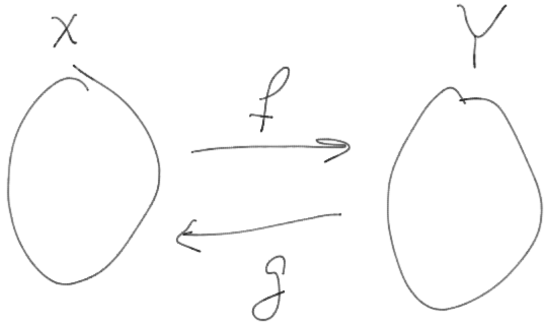
Гомотопическая эквивалентность

Пусть X, Y — топологические пространства.

Определение

X и Y гомотопически эквивалентны ($X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Такие f и g называются гомотопически обратными отображениями.



$$g \circ f \sim id_X$$

$$f \circ g \sim id_Y$$

Гомотопическая эквивалентность

Пусть X, Y — топологические пространства.

Определение

X и Y гомотопически эквивалентны ($X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ и $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Такие f и g называются гомотопически обратными отображениями.

Каждое из f и g называется гомотопической эквивалентностью.

Терминология

Отображения бывают гомотопными, а пространства — гомотопически эквивалентными.

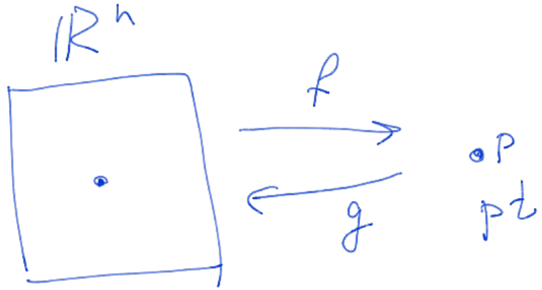
Пример: $\mathbb{R}^n$ и точка

Пример

$\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно одноточечному пространству.

Доказательство.

Подходят любые f и g. Результат сводится к тому, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя гомотопически эквивалентно постоянному. □



$f = \mathrm{const}_p$

$g(p) = 0_{\mathbb{R}^n}$

$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

? $g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

$g \circ f = \mathrm{const}_0 \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ линейной гомотопией.

$f \circ g : pt \to pt$

$f \circ g = \mathrm{id}$

Это отношение эквивалентности

Теорема

Гомотопическая эквивалентность — отношение эквивалентности между топологическими пространствами.

Это отношение эквивалентности

Теорема

Гомотопическая эквивалентность — отношение эквивалентности между топологическими пространствами.

Доказательство.

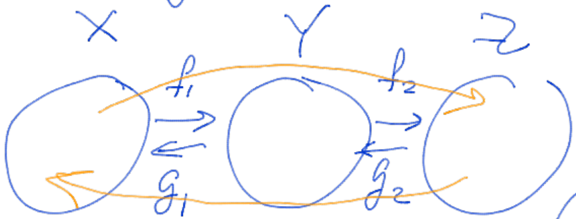
Рефлексивность и симметричность тривиальны.
Транзитивность: Пусть $X \sim Y$ и $Y \sim Z$,
$f_1 : X \to Y$ и $g_1 : Y \to X$ гомотопически обратны,
$f_2 : Y \to Z$ и $g_2 : Z \to Y$ гомотопически обратны.
Тогда $f_2 \circ f_1$ и $g_1 \circ g_2$ гомотопически обратны, так как
$g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim g_1 \circ \mathrm{id}_Y \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \sim \mathrm{id}_X$,
для другой композиции аналогично.
$\Longrightarrow X \sim Z$. □

① Рефл $X \sim X$. $f = g = id_X$

② Симм. $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

$f \longleftrightarrow g$

③



$(g_1 \circ g_2) \circ (f_2 \circ f_1) \sim id_X$??

$\parallel$

$g_1 \circ \underbrace{(g_2 \circ f_2)}_{\sim id_Y} \circ f_1$

$\wr$

$g_1 \circ f_1 \sim id_X$

Гомотопический тип

Определение

Класс пространств, гомотопически эквивалентных данному X, называется его гомотопическим типом.
Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, — гомотопические свойства (гомотопические инварианты).

Гомотопический тип

Определение

Класс пространств, гомотопически эквивалентных данному X, называется его **гомотопическим типом**. Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, — **гомотопические свойства** (**гомотопические инварианты**).

Упражнение

Число компонент линейной связности — гомотопический инвариант.

Содержание

Определение

Пусть X — топологическое пространство.

Определение

Множество $Y \subset X$ — деформационный ретракт пространства X, если существует ретракция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\boxed{\mathrm{in}_{Y\to X} \circ f \sim \mathrm{id}_X\,.}$$

Такое отображение f называется деформационной ретракцией.

Ретракция. —

$f\colon X \to Y$, т.ч.

$f|_Y = \mathrm{id}_Y$.

f - деф ретракция, если

$\mathrm{in}_{Y\to X} \circ f \sim \mathrm{id}_X$

Это гомотопическая эквивалентность

Теорема

Деформационная ретракция — гомотопическая эквивалентность.

Доказательство.

Пусть $f\colon X \to Y$ — деформационная ретракция. Рассмотрим $g = \mathrm{in}_{Y\to X}$. Это гомотопически обратные отображения. $\square$

$f\colon X \to Y$

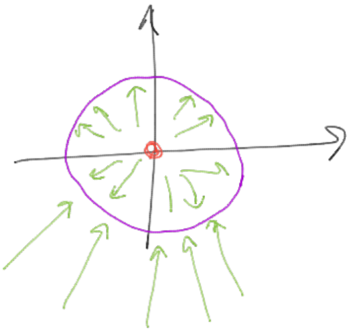
$g = in\colon Y \to X$

$f\circ g = f\circ in = f|_Y = id_Y$

$g\circ f = in\circ f \sim id_X$

Примеры

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$.



$f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$

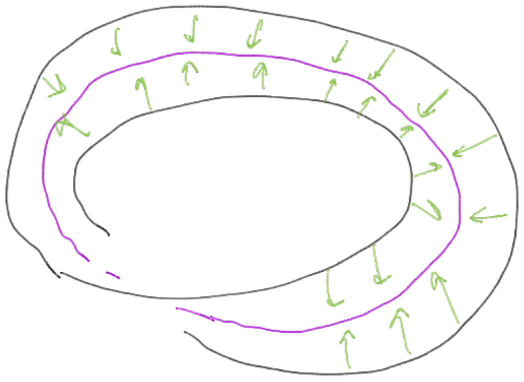
$f(x) = \frac{x}{|x|}$

$\{f_t\} \qquad f_t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f_t(x) = tx + (1-t)f(x)$

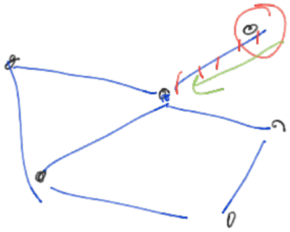
Примеры

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$.
- Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна $\mathbb{S}^1$



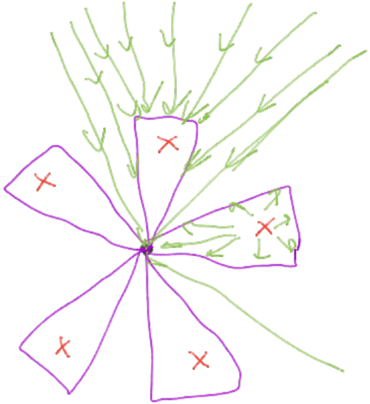
Примеры

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$.
- Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна $\mathbb{S}^1$
- Если из графа удалить висячую вершину (вместе с примыкающим ребром), то полученный граф гомотопически эквивалентен исходному.



Примеры

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$.
- Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна $\mathbb{S}^1$
- Если из графа удалить висячую вершину (вместе с примыкающим ребром), то полученный граф гомотопически эквивалентен исходному.
- Плоскость без n точек гомотопически эквивалентна букету n окружностей.

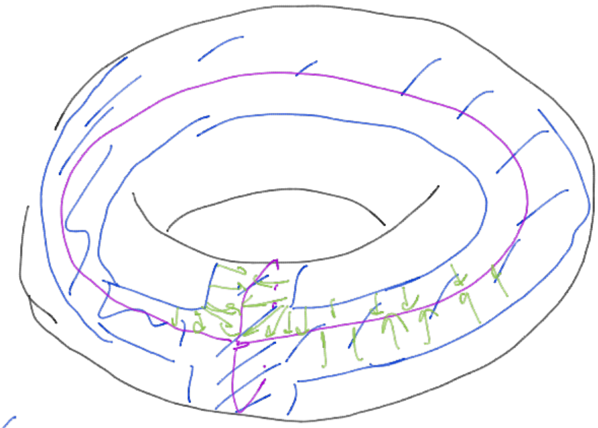


$X = \mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}.$

Y — фиолетовое

Примеры

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$.
- Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна $\mathbb{S}^1$
- Если из графа удалить висячую вершину (вместе с примыкающим ребром), то полученный граф гомотопически эквивалентен исходному.
- Плоскость без n точек гомотопически эквивалентна букету n окружностей.
- Тор с дыркой гомотопически эквивалентен букету двух окружностей.



связная.

Задача

Любая компактная поверхность с непустым краем гомотопически эквивалентна букету окружностей.

(или точке).

Стягиваемые пространства

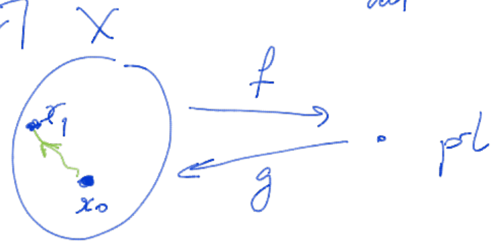
Определение

Топологическое пространство X **стягиваемо**, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Переформулировки стягиваемости:

- тождественное отображение гомотопно постоянному
- некторая точка — деформационный ретракт
- любая точка — деформационный ретракт

X стягиваемо $\overset{def}{\iff} X \sim pt$



1) $f \circ g \sim id_{pt}$ — всегда верно.

2) $g \circ f = \underbrace{const_{x_0} \sim id_X}_{?}$

$\Updownarrow$

$\{x_0\}$ — деф ретракт X

Стягиваемые пространства

Определение

Топологическое пространство X стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке.

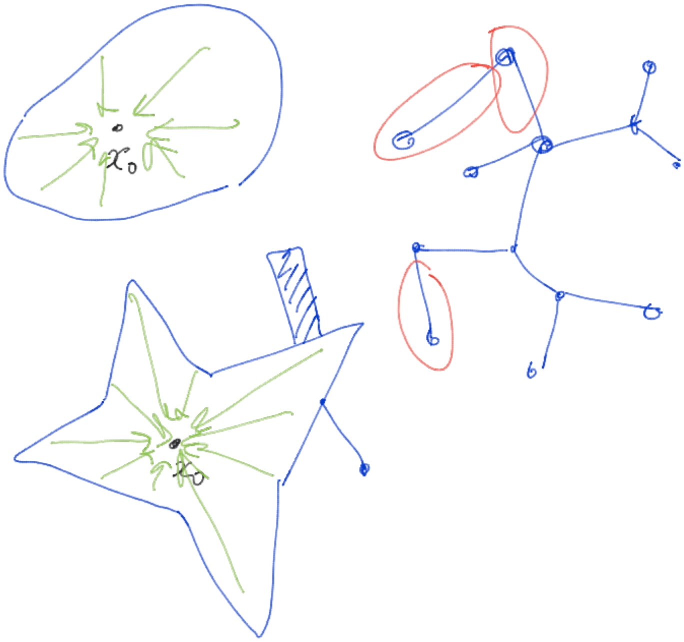
Переформулировки стягиваемости:

- тождественное отображение гомотопно постоянному
- нектораяя точка — деформационный ретракт
- любая точка — деформационный ретракт

Примеры стягиваемых пространств:

- $\mathbb{R}^n$
- выпуклые множества
- звёздные множества
- деревья

Предупреждение: сферы не стягиваемы. Не путайте стягиваемость и односвязность.



Для записей

Содержание

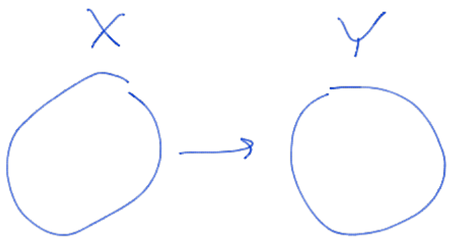
Гомотопические классы отображений

Определение

Множество отображений, гомотопных данному $f : X \to Y$, называется его **гомотопическим классом** (или тоже **гомотопическим типом**).

Обозначение

Множество гомотопических классов отображений из X в Y обозначается $\pi(X, Y)$.



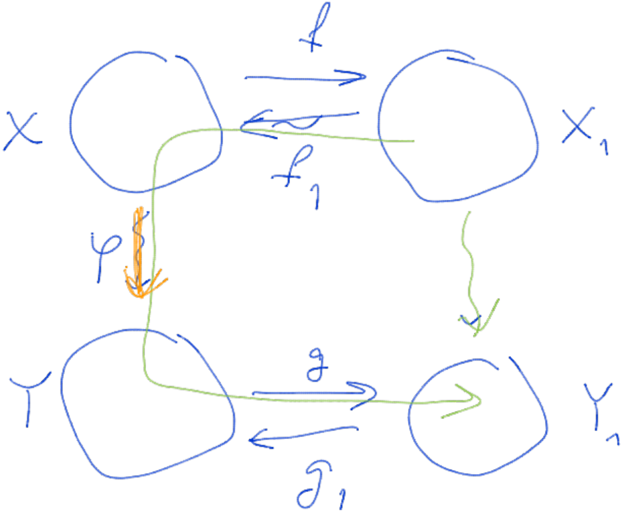
$$\pi(X,Y) = \{\text{непр. отобр } X \to Y\} / \sim$$

Теорема

Пусть X, Y, X_1, Y_1 — топологические пространства, $X \sim X_1$, $Y \sim Y_1$. Тогда есть биекция между $\pi(X, Y)$ и $\pi(X_1, Y_1)$, которая определяется так:

Пусть $f\colon X \to X_1$ и $f_1\colon X_1 \to X$ гомотопически обратны, $g\colon Y \to Y_1$ и $g_1\colon Y_1 \to Y$ гомотопически обратны. Гомотопическому классу отображения $\varphi\colon X \to Y$ ставим в соответствие гомотопический класс отображения

$$\varphi_1 := g \circ \varphi \circ f_1\colon X_1 \to Y_1$$



$$[\varphi] \longmapsto [g \circ \varphi \circ f_1]$$

$$\pi(X, Y) \longrightarrow \pi(X_1, Y_1)$$

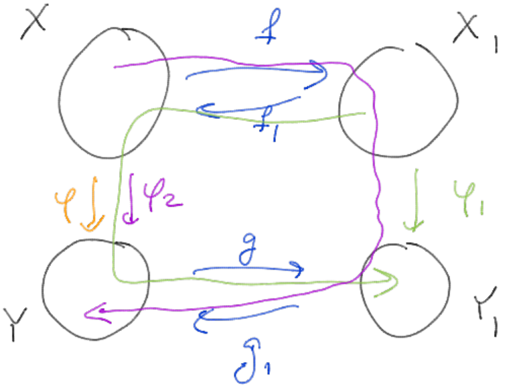
Доказательство

Корректность: Если $\psi \sim \varphi$, то $g \circ \psi \circ f_1 \sim g \circ \varphi \circ f_1$.

Биективность: Построим аналогичное обратное соответствие. Классу отображения $\varphi_1 \colon X_1 \to Y_1$ сопоставляем класс отображения $\varphi_2 = g_1 \circ \varphi_1 \circ f$. Эти соответсвия обратны друг другу: если $\varphi_1 = g \circ \varphi \circ f_1$, где $\varphi \colon X \to Y$, то

$$\varphi_2 = \underbrace{g_1 \circ g}_{} \circ \varphi \circ \underbrace{f_1 \circ f}_{} \sim \mathrm{id}_Y \circ \varphi \circ \mathrm{id}_X = \varphi$$

В обратную сторону — аналогично.



Корректность $[\psi] = [\varphi] \quad (\varphi \sim \psi)$.

$$\Downarrow$$

$$[g \circ \psi \circ f_1] = [g \circ \varphi \circ f_1]$$

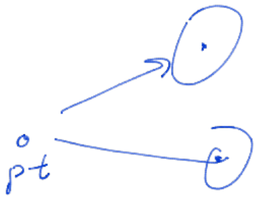
$X_1 = pt$.

Сл. Пусть X стягиваемо, Y — лин. св.

Тогда. 1) Все непр. отобр $X \to Y$ гомотопны друг другу.

2) Все непр. отобр. $Y \to X$ гомотопны друг другу.

① $\pi(X, Y) \leftrightarrow \pi(pt, Y)$



Изоморфность фундаментальных групп

Теорема

Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

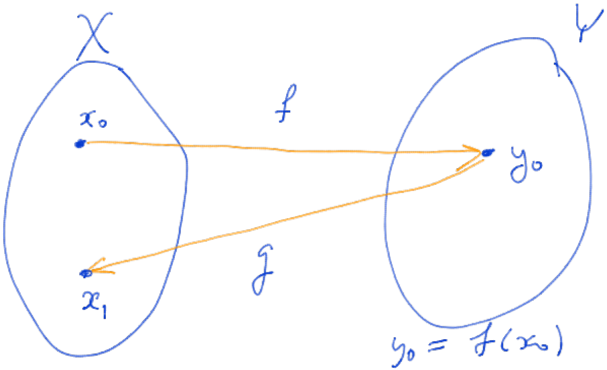
$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} Y$$

Тв: $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$

— изоморфизм (биекция).

Доказательство — 1

Пусть $X \sim Y$, $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ гомотопически обратны, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$.
Докажем, что $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ — изоморфизм (достаточно проверить биективность).
Положим $x_1 = g(y_0)$ и рассмотрим
$g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$.



$$f_*\colon \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, y_0)$$

$$g_*\colon \pi(Y, y_0) \longrightarrow \pi(X, x_1)$$

Доказательство — 1

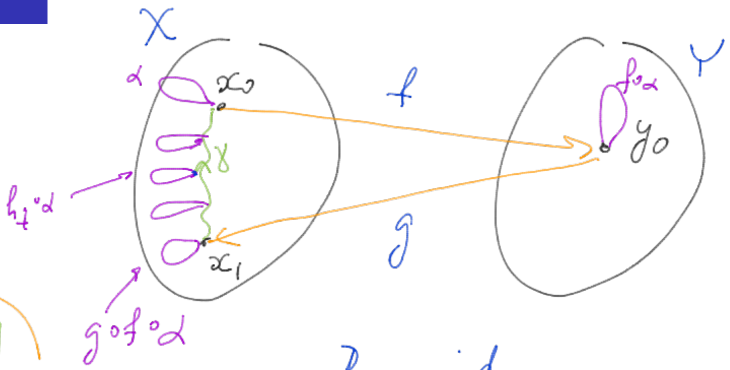
Пусть $X \sim Y$, $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ гомотопически обратны, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$.
Докажем, что $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ — изоморфизм (достаточно проверить биективность).
Положим $x_1 = g(y_0)$ и рассмотрим
$g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

Так как f и g гомотопически обратны, существует гомотопия $\{h_t\}$ между $g \circ f$ и id_X. Пусть $\boxed{\gamma(t) = h_t(x_0)}$.

Для любого $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, так как $\boxed{\{h_t \circ \alpha\}}$ — свободная гомотопия петель, и γ — соответствующая траектория начальной точки, верно равенство

$$[\alpha] = T_\gamma([g \circ f \circ \alpha]) = T_\gamma(g_*(f_*([\alpha]))),$$

где T_γ — гомоморфизм переноса вдоль γ.



$g\circ f \sim \mathrm{id}_X$

$\exists \{h_t\}.\quad h_t\colon X \to X$

$h_0 = g\circ f, \quad h_1 = \mathrm{id}_X$

Доказательство — 1

Пусть $X \sim Y$, $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ гомотопически обратны, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$.
Докажем, что $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ — изоморфизм (достаточно проверить биективность).
Положим $x_1 = g(y_0)$ и рассмотрим
$g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

Так как f и g гомотопически обратны, существует гомотопия $\{h_t\}$ между $g \circ f$ и id_X. Пусть $\gamma(t) = h_t(x_0)$.

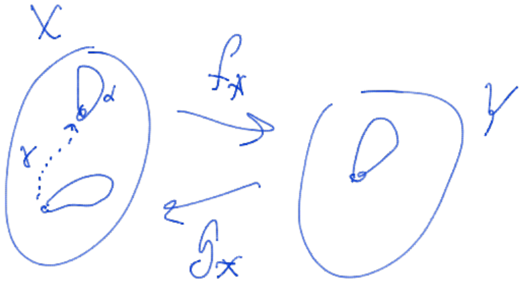
Для любого $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, так как $\{h_t \circ \alpha\}$ — свободная гомотопия петель, и γ — соответствующая траектория начальной точки, верно равенство

$$[\alpha] = T_\gamma([g \circ f \circ \alpha]) = T_\gamma(g_*(f_*([\alpha]))),$$

где T_γ — гомоморфизм переноса вдоль γ.

Итак,

$$T_\gamma \circ g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)} \qquad (*)$$



Доказательство — 2

Из равенства

$$T_\gamma \circ g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)} \qquad (*)$$

и того, что T_γ — биекция, выведем биективность f_*.

Доказательство — 2

Из равенства

$$T_\gamma \circ g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} \qquad (*)$$

и того, что T_γ — биекция, выведем биективность f_*.

- f_* инъективно — так как $T_\gamma \circ g_* \circ f_*$ инъективно (теоретико-множественный аргумент).

Доказательство — 2

Из равенства

$$T_\gamma \circ g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} \qquad (*)$$

и того, что T_γ — биекция, выведем биективность f_*.

- f_* инъективно — так как $T_\gamma \circ g_* \circ f_*$ инъективно (теоретико-множественный аргумент).
- g_* инъективно — применим те же рассуждения к Y и g вместо X и f.

Доказательство — 2

Из равенства

$$T_\gamma \circ g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)} \qquad (*)$$

и того, что T_γ — биекция, выведем биективность f_*.

- f_* инъективно — так как $T_\gamma \circ g_* \circ f_*$ инъективно (теоретико-множественный аргумент).
- g_* инъективно — применим те же рассуждения к Y и g вместо X и f.
- $\implies T_\gamma \circ g_*$ инъективно — так как T_γ биекция.

Доказательство — 2

Из равенства

$$\boxed{T_\gamma \circ g_*} \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} \qquad (*)$$

и того, что T_γ — биекция, выведем биективность f_*.

- f_* инъективно — так как $T_\gamma \circ g_* \circ f_*$ инъективно (теоретико-множественный аргумент).
- g_* инъективно — применим те же рассуждения к Y и g вместо X и f.
- $\implies$ $T_\gamma \circ g_*$ инъективно — так как T_γ биекция.
- f_* и $T_\gamma \circ g_*$ инъективны и одна из их композиций тождественна $\implies$ это биекции (теоретико-множественный аргумент).

Теорема доказана

$G(F(A)) = A \qquad G|_{F(A)} = F^{-1}$

Лемма

$F: A \to B$

$G: B \to A$

F, G - инъект.

$G \circ F = \mathrm{id}_A$

$\Downarrow$

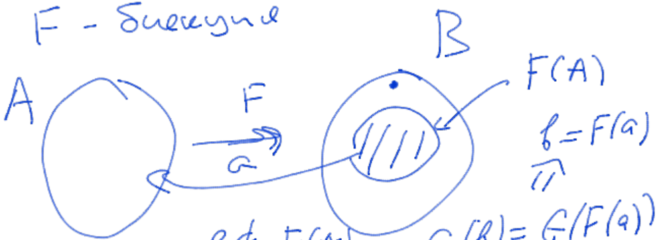
F - биекция

$A = \pi_1(X, x_0)$

$B = \pi_1(Y, y_0)$

$F = f_*$

$G = T_\gamma \circ g_*$



$b \notin F(A)$, $G(b) = G(F(a))$

Стягиваемость и односвязность

Следствие

Любое стягиваемое пространство односвязно.

Доказательство.

Из предыдущей теоремы и односвязности точки. □

Замечание

Обратное неверно.