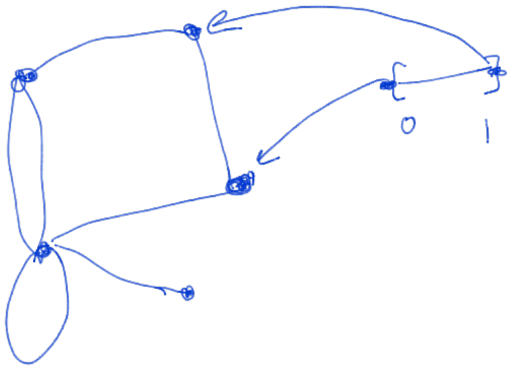
Содержание

Топологические графы

Определение

Топологический граф — пространство, получаемое склеиванием точек (вершин) и отрезков (рёбер) так, что концы каждого отрезка приклеиваются к вершинам, а других склеиваний нет.

Допускаются петли и кратные рёбра.

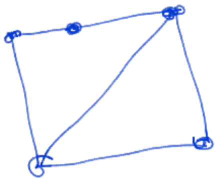


Топологические графы

Определение

Топологический граф — пространство, получаемое склеиванием точек (вершин) и отрезков (рёбер) так, что концы каждого отрезка приклеиваются к вершинам, а других склеиваний нет.

Допускаются петли и кратные рёбра.



Замечание

Графы могут быть гомеоморфны, но не изоморфны как графы (можно добавлять и убирать вершины степени 2, разбивая или объединяя рёбра).

Топологические графы

Определение

Топологический граф — пространство, получаемое склеиванием точек (вершин) и отрезков (рёбер) так, что концы каждого отрезка приклеиваются к вершинам, а других склеиваний нет.

Допускаются петли и кратные рёбра.

Замечание

Графы могут быть гомеоморфны, но не изоморфны как графы (можно добавлять и убирать вершины степени 2, разбивая или объединяя рёбра).

Замечание

Для упрощения доказательств будем в основном рассматривать только конечные или локально конечные графы (граф локально конечен, если степень каждой вершины конечна).

Факт. Γ — граф

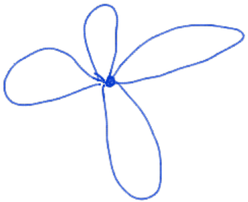
$f : \Gamma \to X$ (топ. пр).

f - непр $\Leftrightarrow$ сужение на $\forall$ ребро непр.

Д-во: в лок. кон. графе ребра — лок. конечное замкнутое покрытие.

Общий случай — упр.

Содержание



Формулировка

Теорема

Фундаментальная группа букета n окружностей — свободная группа с n образующими (обозначение: F_n). В качестве свободных образующих можно взять однократные обходы окружностей букета.

Замечание

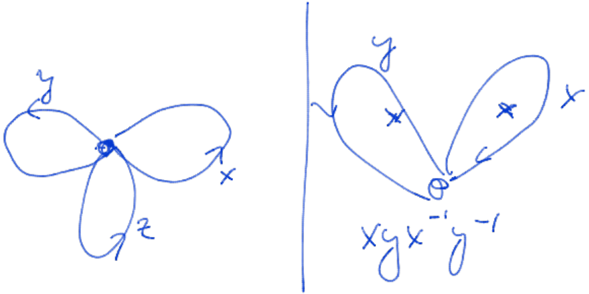
Для бесконечного букета теорема тоже верна, доказательство ничем не отличается.

$$F_2 = \langle x, y\rangle =$$

$$\{e,\ x,\ y,\ xy,\ xy^{-1},\ \dots$$

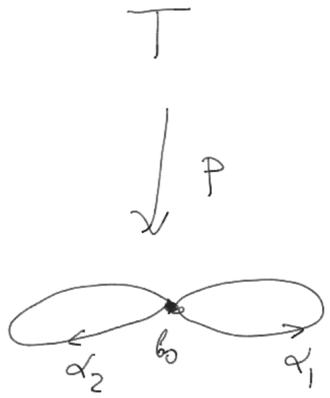
$$\dots\ xy^2x^{-1}y^{-3}\ \dots\ \}$$

$$\cancel{y}\,\cancel{x^{-1}x}\,\cancel{y^{-1}}$$



Доказательство — 1

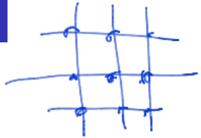
Пусть B — букет окружностей, b_0 — его выделенная точка, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega(B, b_0)$ — петли, соответствующие окружностям букета.
Построим универсальное накрытие $p\colon T \to B$, где T — некоторое бесконечное дерево.

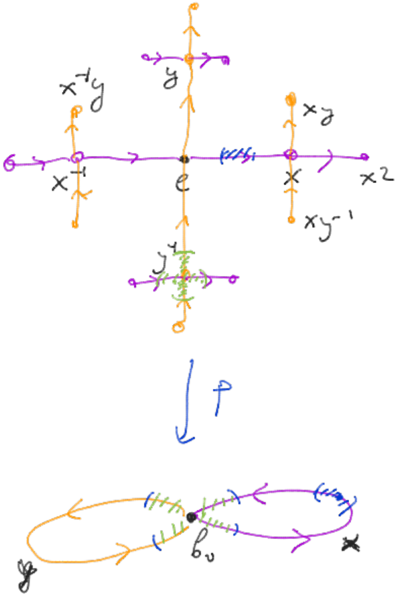


Доказательство — 1

Пусть B — букет окружностей, b_0 — его выделенная точка, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega(B, b_0)$ — петли, соответствующие окружностям букета.
Построим универсальное накрытие $p\colon T \to B$, где T — некоторое бесконечное дерево.

Построение T: Вершины — несократимые слова из букв $x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$. (Они же — элементы свободной группы F_n с образующими $x_1, \dots, x_n$.)
Соединяем ребром два элемента группы, если они отличаются умножением справа на x_i (или x_i^{-1}).



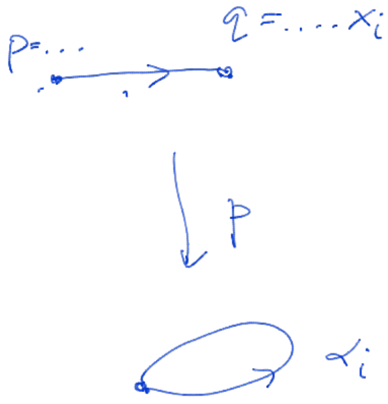


Доказательство — 1

Пусть B — букет окружностей, b_0 — его выделенная точка, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega(B, b_0)$ — петли, соответствующие окружностям букета.
Построим универсальное накрытие $p\colon T \to B$, где T — некоторое бесконечное дерево.

Построение T: Вершины — несократимые слова из букв $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. (Они же — элементы свободной группы F_n с образующими $x_1, \ldots, x_n$.)
Соединяем ребром два элемента группы, если они отличаются умножением справа на x_i (или x_i^{-1}).

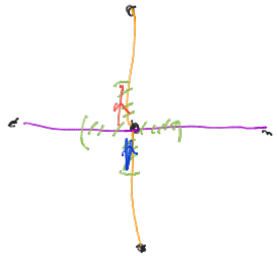
Построение $p\colon T \to B$: Все вершины отображаем в b_0.
Ребро между вершинами p и q, где $q = px_i$, отображаем в α_i согласно направлению обхода.

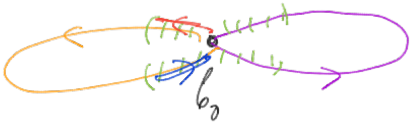


Доказательство — 2

Теперь доказываем следующие факты:

- p — накрытие.

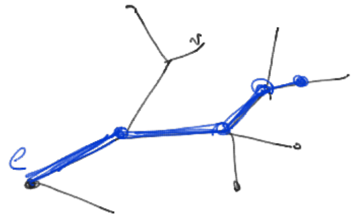




Доказательство — 2

Теперь доказываем следующие факты:

- p — накрытие.
- Любое (локально конечное) дерево стягиваемо.
  $\Longrightarrow$ T стягиваемо $\Longrightarrow$ T односвязно
  $\Longrightarrow$ p — универсальное накрытие.



$\{f_t\}, \ f_t : T \to T.$

$f_t(x)$ — точка на пути ex на расстоянии $(1-t)\cdot d(e,x)$

$d(e,x)$ — "длина" $\boxed{\text{простого}}$ пути из e в x

$\mathbb{R}$

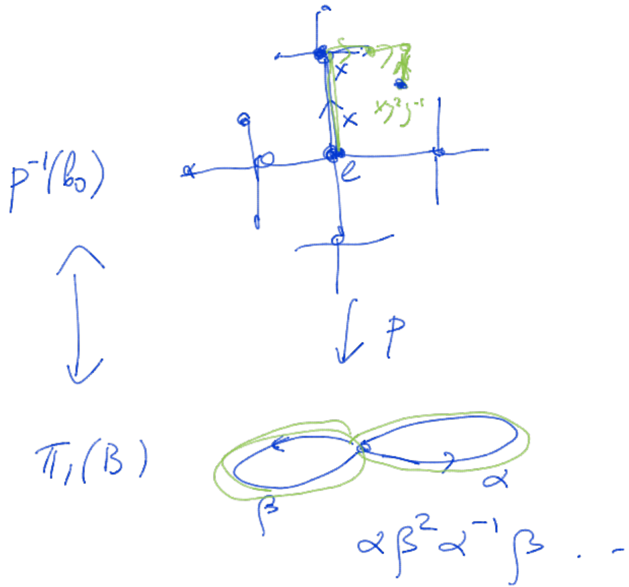
$(x,t) \to (1-t)x.$

Доказательство — 2

Теперь доказываем следующие факты:

- p — накрытие.
- Любое (локально конечное) дерево стягиваемо.
  $\implies$ T стягиваемо $\implies$ T односвязно
  $\implies$ p — универсальное накрытие.
- Вершина $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ (где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$) — конец поднятия петли $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$.

α, β — петли
x, y — буквы
$\alpha \leftrightarrow x$
$\beta \leftrightarrow y$



Доказательство — 2

Теперь доказываем следующие факты:

- p — накрытие.
- Любое (локально конечное) дерево стягиваемо.
  $\implies$ T стягиваемо $\implies$ T односвязно
  $\implies$ p — универсальное накрытие.
- Вершина $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ (где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$) — конец поднятия петли $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$.

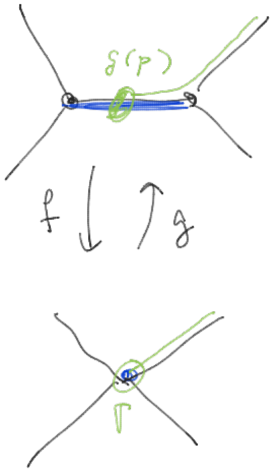
Осталось применить теорему о биекции между фундаментальной группой и листами универсального накрытия.

Теорема доказана

Для записей

Для записей

Содержание



f – проекция факторизации

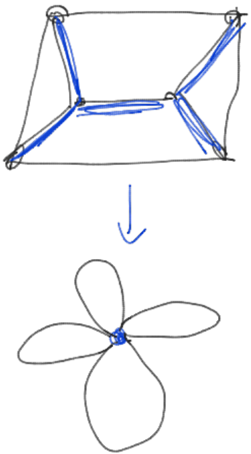
Формулировка

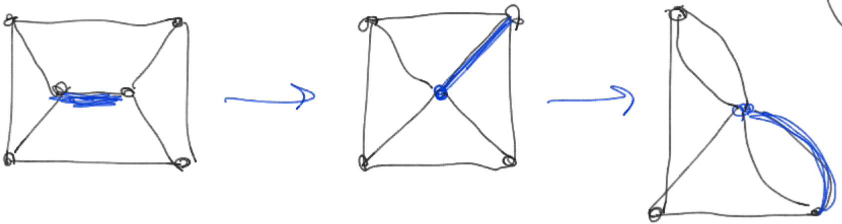
Теорема

Пусть Γ *— локально конечный граф,*
$T \subset \Gamma$ *— стягиваемый подграф.*
Тогда $\Gamma / T \sim \Gamma$.

Замечание

Граф стягиваем $\iff$ он дерево.
Доказательство в одну сторону было (для локально конечных). В другую — скоро станет очевидно.

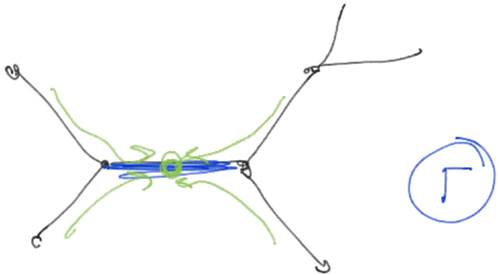




Доказательство — 1: основная лемма

Лемма

Существует непрерывное $h\colon \Gamma \to \Gamma$ *такое, что* $\cancel{\Gamma}$ h $\sim \mathrm{id}$ *и* $h|_T = const$.

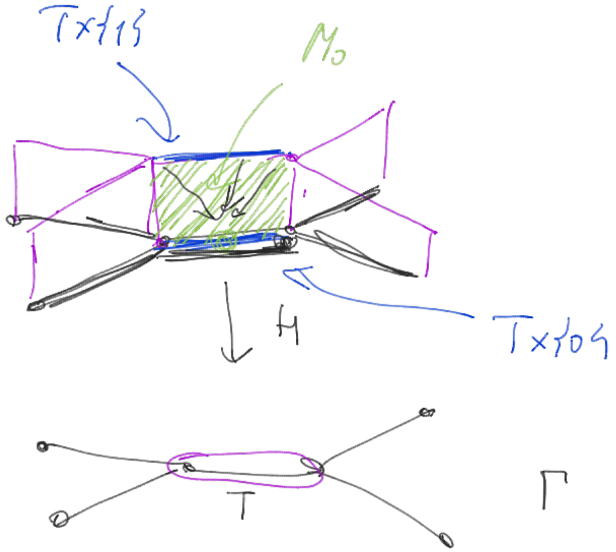


Доказательство леммы

Будем строить сразу h и гомотопию между id и h.
Цель: построить $H\colon \Gamma \times [0,1] \to \Gamma$ такое, что $H(\cdot,0) = \mathrm{id}$ и $H(\cdot,1)|_T = const$.

Так как T стягиваемо, существует $H_0\colon T \times [0,1] \to T$ с нужными свойствами. Продолжим его до искомого H.
Обозначим $M_0 = T \times [0,1]$.

Сначала продолжим H_0 до $H_1\colon M_1 \to \Gamma$, где $M_1 = M_0 \cup (\Gamma \times \{0\})$ и $H_1(\cdot,0) = \mathrm{id}$.



Доказательство леммы

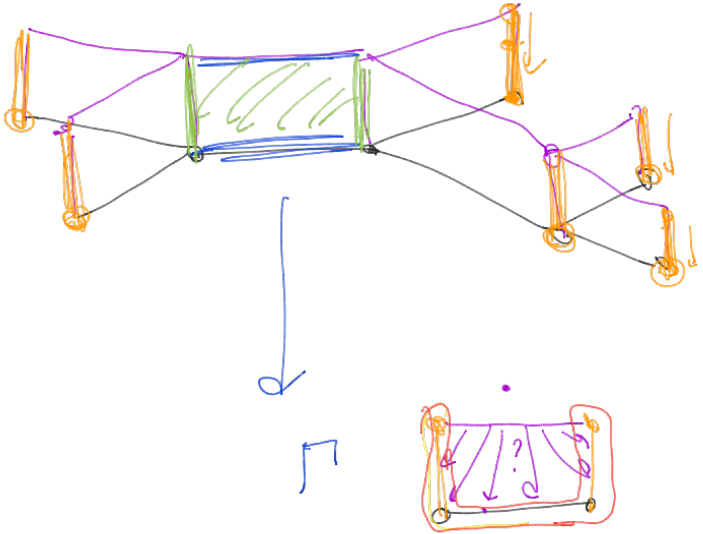
$M_2 = M_1 \cup \{y(e_0)\}.$

Будем строить сразу h и гомотопию между id и h.
Цель: построить $H\colon \Gamma \times [0,1] \to \Gamma$ такое, что $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}$ и $H(\cdot, 1)|_T = const$.

Так как T стягиваемо, существует $H_0\colon T \times [0,1] \to T$ с нужными свойствами. Продолжим его до искомого H. Обозначим $M_0 = T \times [0,1]$.

Сначала продолжим H_0 до $H_1\colon M_1 \to \Gamma$, где $M_1 = M_0 \cup (\Gamma \times \{0\})$ и $H_1(\cdot, 0) = \mathrm{id}$.

Пусть V — множество вершин $\Gamma \setminus T$. Продолжим H_1 до $H_2\colon M_2 \to \Gamma$, где $M_2 = M_1 \cup \boxed{(V \times [0,1])}$ и $H_2(v, t) = H_1(v, 0) = v$ для всех $v \in V$ и $t \in [0,1]$.



Доказательство леммы

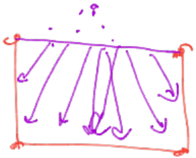
Будем строить сразу h и гомотопию между id и h.
Цель: построить $H\colon \Gamma \times [0,1] \to \Gamma$ такое, что $H(\cdot,0) = \mathrm{id}$ и $H(\cdot,1)|_T = const$.

Так как T стягиваемо, существует $H_0\colon T \times [0,1] \to T$ с нужными свойствами. Продолжим его до искомого H.
Обозначим $M_0 = T \times [0,1]$.

Сначала продолжим H_0 до $H_1\colon M_1 \to \Gamma$, где $M_1 = M_0 \cup (\Gamma \times \{0\})$ и $H_1(\cdot,0) = \mathrm{id}$.

Пусть V — множество вершин $\Gamma \setminus T$. Продолжим H_1 до $H_2\colon M_2 \to \Gamma$, где $M_2 = M_1 \cup (V \times [0,1])$ и $H_2(v,t) = H_1(v,0) = v$ для всех $v \in V$ и $t \in [0,1]$.

Мы определили отображение на множестве $M_2 = (\Gamma \times \{0\}) \cup ((T \cup V) \times [0,1])$.
Легко видеть, что существует ретракция $\psi\colon \Gamma \times [0,1] \to M_2$ (она строится отдельно на произведении каждого ребра и $[0,1]$).
Определим $H = H_2 \circ \psi$ и $h = H(\cdot,1)$. $\square$



$$\psi\colon \Gamma \times [0,1] \to M_2$$

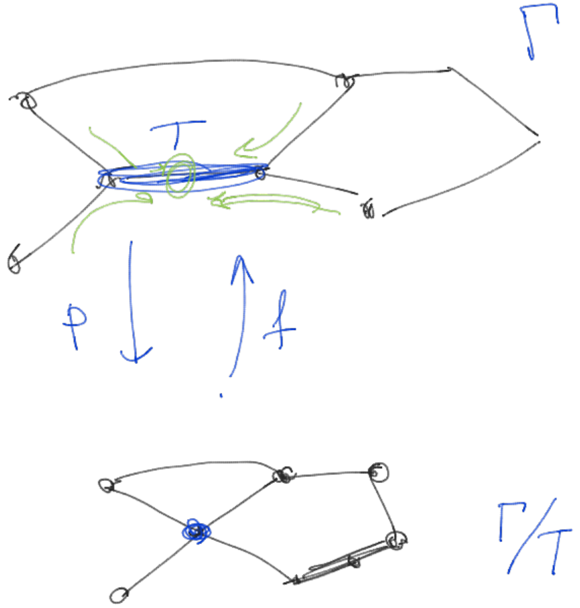
$$\psi|_{M_2} = id$$

Вывод теоремы из леммы

Пусть $h\colon \Gamma \to \Gamma$ — отображение из леммы.
Так как $h|_T = conts$, h пропускается через факторпространство:
$h = \varphi \circ p$, где $p\colon \Gamma \to \Gamma/T$ — проекция факторизации,
$f\colon \Gamma/T \to \Gamma$ — некоторое непрерывное отображение.

Так как $h \sim \mathrm{id}$, p и f гомотопически обратны.
В одну сторону: $\underbrace{f \circ p = h \sim \mathrm{id}_\Gamma}$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "F=h"] \arrow[d, "p"'] & & Z \\ \Gamma/T \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$



Вывод теоремы из леммы

Пусть $h\colon \Gamma \to \Gamma$ — отображение из леммы.
Так как $h|_T = conts$, h пропускается через факторпространство: f
$h = \cancel{\varphi} \circ p$, где $p\colon \Gamma \to \Gamma/T$ — проекция факторизации,
$f\colon \Gamma/T \to \Gamma$ — некоторое непрерывное отображение.

Так как $h \sim \mathrm{id}$, p и f гомотопически обратны.
В одну сторону: $f \circ p = h \sim \mathrm{id}_\Gamma$.

В другую: из гомотопии $\{h_t\}$ между id_Γ и h получается гомотопия $\{f_t\}$, $f_t\colon \Gamma \to \Gamma/T$, между p и $p \circ h$ — просто возьмем композицию с p справа.
Так как $h_t(T) \subset T$, $f_t|_T = const \implies f_t$ пропускается через факторизацию: $f_t = g_t \circ p$, где $g_t\colon \Gamma/T \to \Gamma/T$.

Это и есть искомая гомотопия между $g_0 = \mathrm{id}_{\Gamma/T}$ и $g_1 = p \circ f$
(Пояснение: $\underline{f_1 = p \circ h} = \underline{p \circ f \cancel{\circ p}} \implies \underline{g_1 = p \circ f}$).

Надо: $\boxed{p \circ f} \sim \mathrm{id}_{\Gamma/T}$

- $h_t\colon \Gamma \to \Gamma$

$h_0 = id, \quad h_1 = h$

$h_t(T) \subset T$

$f_0 = p \circ id_\Gamma = p$
$g_0 = id$

- $\boxed{f_t := p \circ h_t}$

$f_t\colon \Gamma \to \Gamma/T$

$f_t|_T = const. \Rightarrow$

- $f_t = \boxed{g_t} \circ p, \quad g_t\colon \Gamma/T \circlearrowleft$

Для записей

Для записей

Теорема о продолжении гомотопии

Замечание

Доказательство леммы на самом деле доказывает более общую теорему о продолжении гомотопии:
Пусть X — граф, Y — его подграф, Z — топологическое пространство, $\{g_t\}$ — гомотопия отображений из Y в Z с $g_0 = f|_Y$. Тогда $\{g_t\}$ продолжается до гомотопии $\{f_t\}$ отображений из X в Z с $f_0 = f$.

Замечание

Теорема о продолжении гомотопии верна (и доказывается так же) не только для графов, но и для клеточных пространства любой размерности.
(Разговор о них будет позже.)

Граф гомотопически эквивалентен букету окружностей

Следствие

Связный граф с n вершинами и m ребрами гомотопически эквивалентен букету $m - n + 1$ окружностей (или точке, если $m - n + 1 = 0$).

Доказательство.

Стянем в точку остовное дерево. □

Граф гомотопически эквивалентен букету окружностей

Следствие

Связный граф с n вершинами и m ребрами гомотопически эквивалентен букету $m - n + 1$ окружностей (или точке, если $m - n + 1 = 0$).

Доказательство.

Стянем в точку остовное дерево. □

Следствие

Фундаментальная группа связного графа с n вершинами и m ребрами — свободная группа с $m - n + 1$ образующими.

Бесконечные графы

Замечание

Все рассуждения работают и для бесконечных графов. Роль числа $m - n + 1$ играет количество независимых циклов.