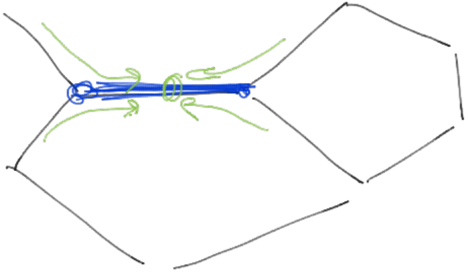
Содержание

Лемма

Существует непрерывное $h\colon \Gamma \to \Gamma$ *такое, что*

- $h|_T = const$;
- $h \sim \mathrm{id}_\Gamma$;
- *существует такая гомотопия* $\{h_t\}$ *между* id *и* h, *что* $h_t(T) \subset T$ *при всех* $t \in [0,1]$.

Последнее условие не было сформулировано, но использовалось при применении леммы.



Содержание

Пример: $F_\infty < F_2$

Теорема

В свободной группе F_2 существуют подгруппы, изоморфные F_∞ (и F_n для любого натурального n).

Пример: $F_\infty < F_2$

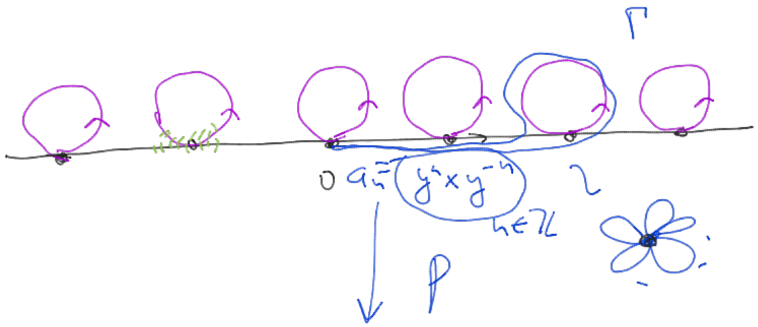
Теорема

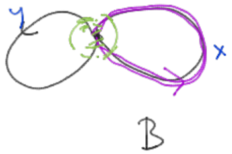
В свободной группе F_2 существуют подгруппы, изоморфные F_∞ (и F_n для любого натурального n).

Доказательство.

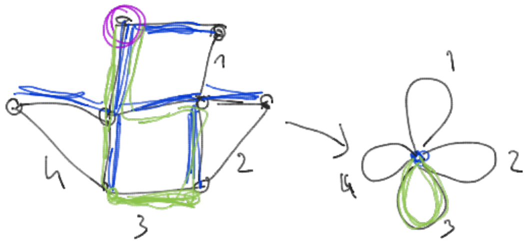
Букет двух окружностей (B) можно накрыть графом Γ с бесконечным числом циклов. Тогда $\pi_1(\Gamma) \simeq F_\infty$.

Индуцированный гомоморфизм $p_*\colon \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(B)$ инъективен.
Его образ — искомая подгруппа. $\square$





$$p_* : \pi_1(\Gamma) \hookrightarrow \pi_1(B)$$
$$\pi_1(\Gamma) = F_\infty$$



Для записей

Теорема Нильсена-Шраера

Теорема

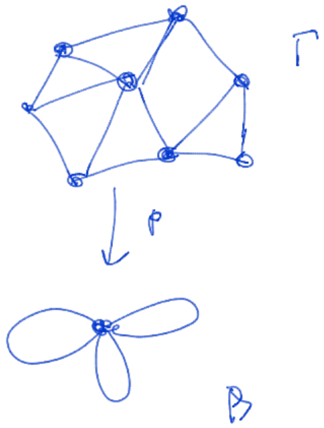
Любая подгруппа свободной группы — тоже свободная группа.

План доказательства

Пусть G — свободная группа. Представим ее как $\pi_1(B)$, где B — букет нужного числа окружностей.

Пусть $H < G$ — произвольная подгруппа. Докажем, что она свободная.

Для этого построим накрытие $p\colon \Gamma \to B$, где Γ — некоторый граф, и группа накрытия (образ p_*) совпадает с H. Так как p_* инъективно, а $\pi_1(\Gamma)$ — свободная группа, отсюда следует, что H свободная.



$$\operatorname{Im} p_* = H \simeq \pi_1(\Gamma)$$

План доказательства

Пусть G — свободная группа. Представим ее как $\pi_1(B)$, где B — букет нужного числа окружностей.

Пусть $H < G$ — произвольная подгруппа. Докажем, что она свободная.

Для этого построим накрытие $p\colon \Gamma \to B$, где Γ — некоторый граф, и группа накрытия (образ p_*) совпадает с H. Так как p_* инъективно, а $\pi_1(\Gamma)$ — свободная группа, отсюда следует, что H свободная.

Построение накрытия $p\colon \Gamma \to B$:

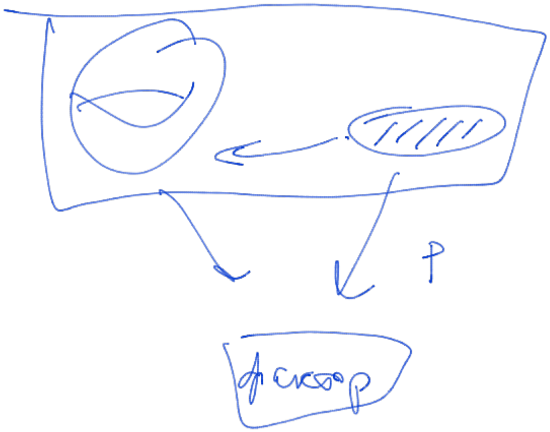
Вершины Γ — левые классы смежности по H (т.е. склеиваем элементы группы, отличающиеся умножением слева на элементы H)

Соединяем ребром вершины, отличающиеся умножением справа на образующую x_i. Это корректно, так как умножение справа и слева коммутируют.

Отображение p — аналогично универсальному накрытию.

Для записей

Содержание



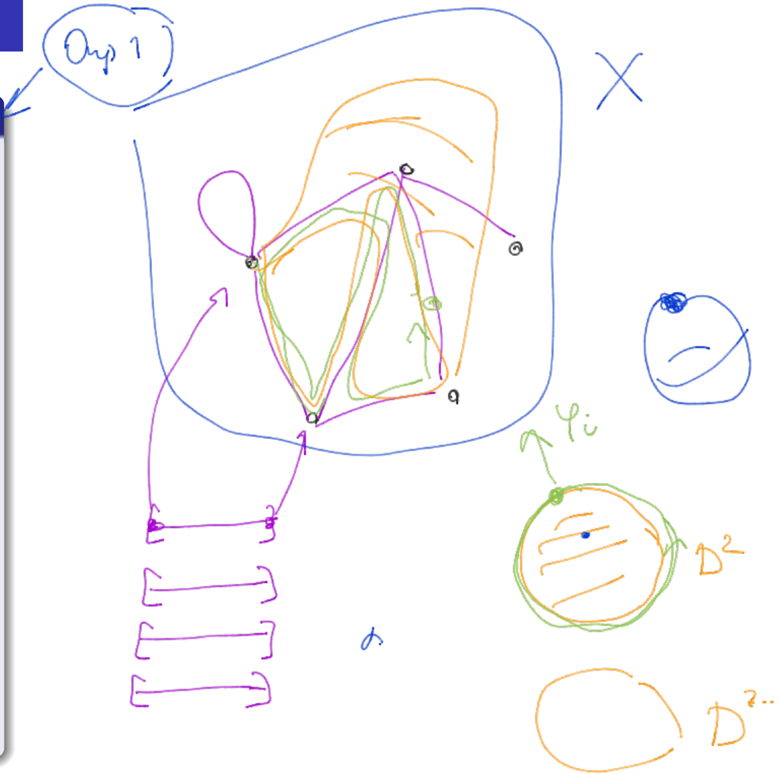
Определение клеточного пространства

Определение

Клеточное пространство размерности n определяется по индукции следующим образом.
Клеточное пространство размерности 0 — дискретное пространство. Клеточное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ — топологическое пространство X, которое может быть получено (с точностью до гомеоморфизма) из клеточного пространства Y размерности $k < n$ приклеиванием набора $\{D_i^n\}_{i \in I}$ копий диска D^n по непрерывным отображениям $\varphi_i \colon \partial D_i^n \to Y$, где ∂D_i^n — краевая сфера диска D_i^n.

Клеточное разбиение (клеточная структура) — конкретный способ представить X в таком виде, вместе с аналогичным представлением Y и так далее до размерности 0.

Клетки — внутренности приклеиваемых дисков, а также точки исходного 0-мерного пространства.



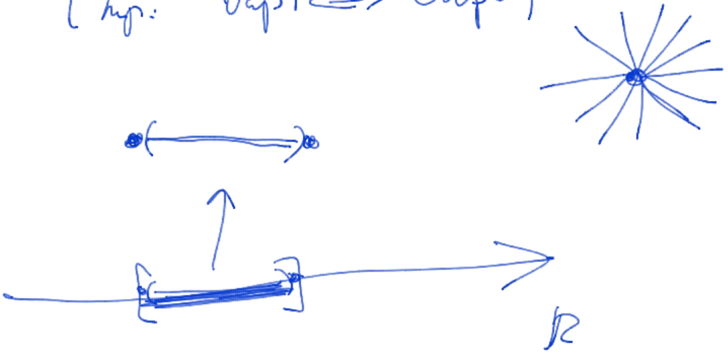
Другое определение

(Упр: Опр1 $\Longleftrightarrow$ Опр2)

Определение

Клеточное разбиение хаусдорфова пространства X — это следующая структура:

- X разбито на подмножества e_i, $i \in I$ (клетками).
- Каждой клетке приписано число из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (размерность), клетка размерности n гомеоморфна открытому шару в $\mathbb{R}^n$. В частности, 0-мерные клетки — точки. Размерность клетки часто обозначают верхним индексом: e_i^n.
- Для каждой клетки e_i^n есть приклеивающее отображение $\varphi_i \colon D^n \to X$ такое, что сужение φ_i^n на открытый шар — гомеоморфизм на e_i и $\varphi_i^n(\partial D^n)$ содержится в конечном объединении клеток меньшей размерности.
- Множество $A \subset X$ замкнуто $\Longleftrightarrow$ его пересечение с замыканием любой клетки замкнуто.



$A \subset X$ замк $\Longleftrightarrow$ $\forall i$ $\varphi_i^{-1}(A)$ замкн. в D^n

Примеры

Пример

Графы Граф — 1-мерное клеточное пространство (определения совпадают).

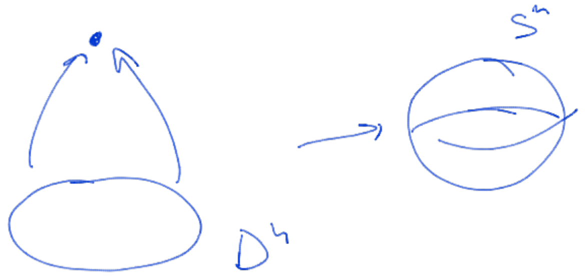
Примеры

Пример

Графы Граф — 1-мерное клеточное пространство (определения совпадают).

Пример (клеточное разбиение сферы)

$\mathbb{S}^n$ имеет клеточное разбиение из двух клеток: одной 0-мерной и одной n-мерной.
Диск D^n приклеивается к точке по единственному возможному отображению из $\mathbb{S}^{n-1}$ в эту точку.



Примеры

Пример

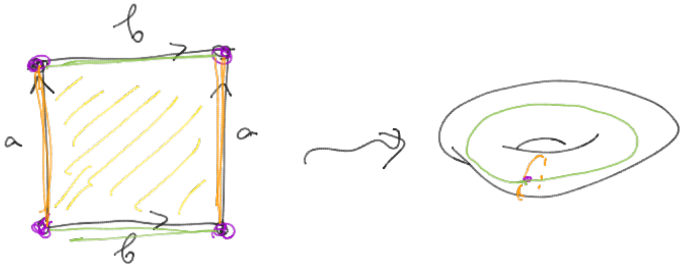
Графы Граф — 1-мерное клеточное пространство (определения совпадают).

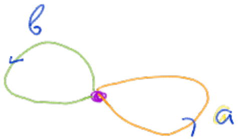
Пример (клеточное разбиение сферы)

$\mathbb{S}^n$ имеет клеточное разбиение из двух клеток: одной 0-мерной и одной n-мерной.
Диск D^n приклеивается к точке по единственному возможному отображению из $\mathbb{S}^{n-1}$ в эту точку.

Пример (клеточное разбиение тора)

Рассмотрим тор, склеенный из квадрата.
Все вершины склеиваются в одну, это 0-мерная клетка.
Стороны склеиваются в две петли, это 1-мерные клетки.
Квадрат, приклеиваемый к этому букету окружностей — 2-мерная клетка.





$\boxed{aba^{-1}b^{-1}}$

Термины

Названия для пространства с клеточным разбиением:

- клеточное пространство
- клеточный комплекс
- CW-комплекс

Клеточный комплекс —

- конечный, если клеток конечное число
  (примечание: это равносильно компактности)
- локально конечный, если клетки образуют локально конечное покрытие
  (это равносильно локальной компактности)
- конечномерный, если размерности клеток ограничены; при этом максимальная размерность клетки называется размерностью пространства

Остовы

Определение

Пусть X — клеточное пространство с зафиксированным клеточным разбиением.
Его k-мерный остов — объединение всех клеток размерности не больше k.
Обозначение: $sk_k(X)$ или X_k.

Замечание

Остовы вложены друг в друга:
$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n = X$.

sk = skeleton

Эйлерова характеристика

Определение

Пусть X — конечное клеточное пространство размерности n. Пусть f_k — количество k-мерных клеток. Эйлеровой характеристикой X называется число

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k$$

Теорема (без доказательства)

Эйлерова характеристика не зависит от клеточного разбиения (т.е. она топологический инвариант). Более того, она — гомотопический инвариант.

$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \ldots -$

Теорема о продолжении гомотопии

Определение

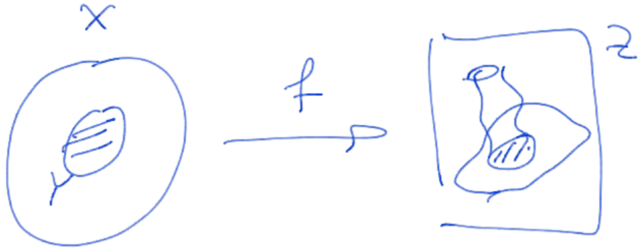
Клеточное подпространство клеточного пространства X — замкнутое множество $Y \subset X$, состоящее из целых клеток.

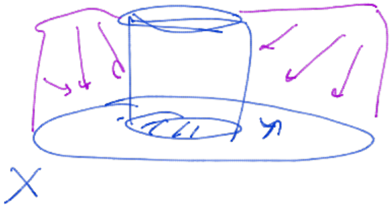
Теорема (без доказательства)

Пусть X — клеточное пространство, $Y \subset X$ — клеточное подпространство, Z — топологическое пространство, $f\colon X \to Z$ — непрерывное отображение, $H_0\colon Y \times [0,1] \to Z$ — гомотопия, $H_0(\cdot, 0) = f|_Y$.

Тогда существует гомотопия $H\colon X \times [0,1] \to Z$, продолжающая H_0 и такая, что $H(\cdot, 0) = f$.

Комментарий: доказательство полностью аналогично лемме из теоремы о стягивании подграфа.





Содержание

Приклеивание двумерной клетки

Теорема

Пусть Y — топологическое пространство,
X получается приклеиванием к Y диска D^2 по непрерывному отображению $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to Y$,
$x_0 = \alpha(1,0)$.
Тогда

$$\boxed{\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0)/N([\alpha])}$$

где $[\alpha]$ — элемент фундаментальной группы, представленный петлёй α,
$N(\dots)$ — нормальная оболочка. (норм. замыкание)

||

$\bigcap$ {норм. подгрупп содерж. $[\alpha]$}.

$x_0 = \alpha(1,0)$.

$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)/N([\alpha])$

Замечание

Если $\pi_1(X, x_0)$ задана образующими и соотношениями, то $\pi_1(Y, x_0)$ получается добавлением $[\alpha]$ в список соотношений.

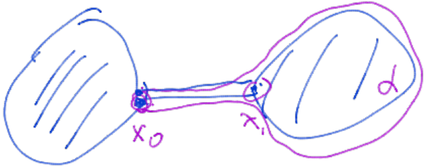
$$\langle x, y, z \mid \underset{e}{\underset{\parallel}{xy^2}}, \underset{e}{\underset{\parallel}{xyz}}, \underset{e}{\underset{\parallel}{y^{10}}}, \ldots \rangle$$

$$\parallel$$

$$F_3 / N(\{xy^2, xyz, y^4, \ldots\})$$

$$\mathbb{Z}_4 = \langle x \mid x^4 \rangle$$

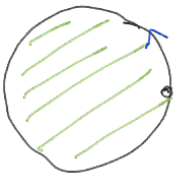
$$\mathbb{Z}^2 = \langle x, y \mid \underline{xyx^{-1}y^{-1}} \rangle$$



Примеры

Пример (D^2)

Приклеим D^2 к $\mathbb{S}^1$ естественным образом.
Получаем $\pi_1(D^2) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{e\}$.



$Y = S^1$

$X = D^2.$

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(D^2) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{e\}$

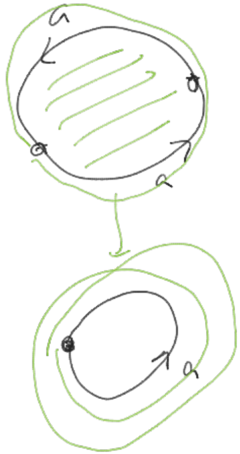
Примеры

Пример (D^2)

Приклеим D^2 к $\mathbb{S}^1$ естественным образом.
Получаем $\pi_1(D^2) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{e\}$.

Пример ($\mathbb{RP}^2$)

$\mathbb{RP}^2$ получается приклеиванием D^2 к $\mathbb{S}^1$ по отображению $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, соответствующему двукратному обходу окружности.
$\implies \pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}/N(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



$\mathbb{RP}^2 = D^2/\approx$

при $x \neq y$

$x \approx y \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| = 1 \\ x = -y \end{cases}$

Примеры

Пример (D^2)

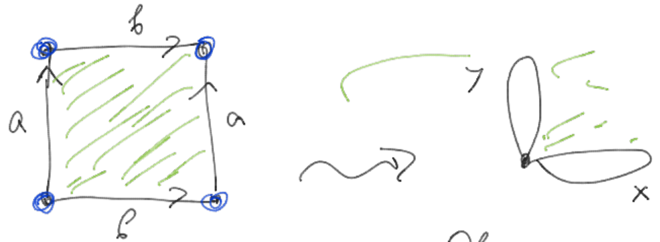
Приклеим D^2 к $\mathbb{S}^1$ естественным образом.
Получаем $\pi_1(D^2) \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{e\}$.

Пример ($\mathbb{RP}^2$)

$\mathbb{RP}^2$ получается приклеиванием D^2 к $\mathbb{S}^1$ по отображению $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, соответствующему двукратному обходу окружности.
$\implies \pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}/N(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Пример ($\mathbb{T}^2$)

Возьмем клеточное разбиение тора, получаемое из стандартного склеивания квадрата. Пусть Y — 1-мерный остов, это букет двух окружностей $\implies \pi_1(Y) = F_2$.
Обозначим образующие через x и y. При приклеивании квадрата его граница образует петлю $xyx^{-1}y^{-1}$.
$\implies \pi_1(\mathbb{T}^2) = \langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$.



$X = T^2$

Y = букет двух окр.

$\alpha = x y x^{-1} y^{-1}$

$\pi_1(Y) = F_2 = \langle x, y \rangle$.

$\pi_1(T^2) = F_2 / N(xyx^{-1}y^{-1}) =$

$= \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$.

Для записей

Доказательство — 1

Рассмотрим включение $in\colon Y \to X$ и индуцированный им гомоморфизм $in_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
Докажем, что in_* сюръективен и $\ker(in_*) = N([\alpha])$.
Из этого будет следовать теорема.

$$Y \xhookrightarrow{in} X$$

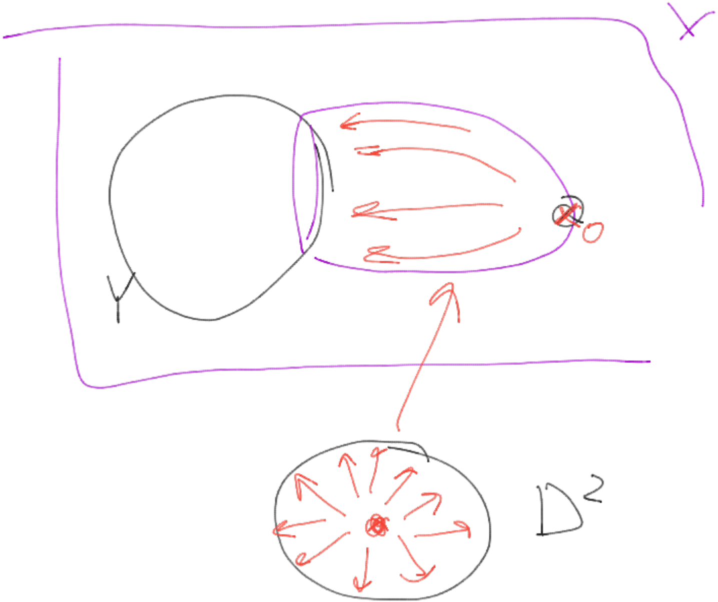
$$f = in_*\colon \underset{\substack{\shortparallel \\ G}}{\pi_1(Y)} \to \pi_1(X)$$

$$\boxed{\operatorname{Im} f \simeq G/\ker f}$$

Доказательство — 1

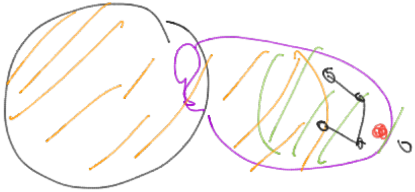
Рассмотрим включение $in\colon Y \to X$ и индуцированный им гомоморфизм $in_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
Докажем, что in_* сюръективен и $\ker(in_*) = N([\alpha])$.
Из этого будет следовать теорема.

Замена Y на X без точки.
Пусть o — центр приклеваемого диска $X \setminus Y$.
Тогда $X \setminus \{o\} \sim Y$ (деформационная ретракция).
$\implies \pi_1(Y) = \pi_1(X \setminus \{o\}) =: G.$
Дальше будем вместо $\pi_1(Y)$ использовать $\pi_1(X \setminus \{o\})$.



Доказательство — 1

Рассмотрим включение $in\colon Y \to X$ и индуцированный им гомоморфизм $in_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
Докажем, что in_* сюръективен и $\ker(in_*) = N([\alpha])$.
Из этого будет следовать теорема.



Замена Y на X без точки.
Пусть o — центр приклеваемого диска $X \setminus Y$.
Тогда $X \setminus \{o\} \sim Y$ (деформационная ретракция).
$\implies \pi_1(Y) = \pi_1(X \setminus \{o\}) =: G$.
Дальше будем вместо $\pi_1(Y)$ использовать $\pi_1(X \setminus \{o\})$.

Сюръективность in_*.
Она равносильна такому утверждению: любая петля из $\Omega(X, x_0)$ гомотопна такой, которая содержится в Y.
Вместо Y можно взять $X \setminus \{o\}$.
Факт верен по лемме о свободной точке (см. доказательство односвязности сферы): малым шевелением петля переводится в гомотопную петлю, которая вблизи o состоит из отрезков. Еще одним малым шевелением сделаем, чтобы отрезки обходили o.