Содержание

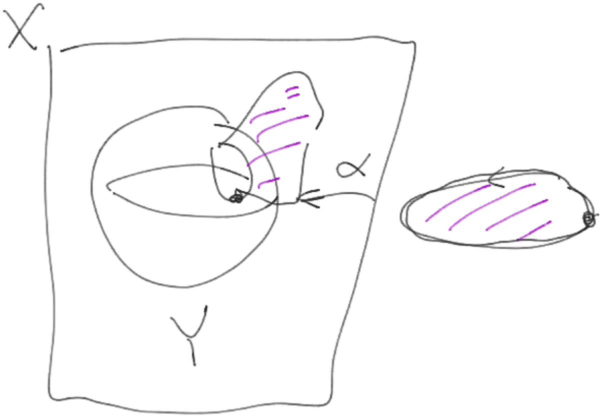
Приклеивание двумерной клетки

Теорема

Пусть Y *— топологическое пространство,*
X *получается приклеиванием к* Y *диска* D^2 *по непрерывному отображению* $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to Y$*,*
$x_0 = \alpha(1,0)$.
Тогда

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0)/N([\alpha])$$

где $[\alpha]$ *— элемент фундаментальной группы, представленный петлёй* α*,*
$N(\dots)$ *— нормальная оболочка.*

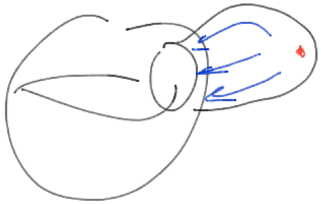


Доказательство — 1 (повтор)

Рассмотрим включение $in\colon Y \to X$ и индуцированный им гомоморфизм $in_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
Докажем, что in_* сюръективен и $\ker(in_*) = N([\alpha])$.
Из этого будет следовать теорема.

Замена Y на X без точки.
Пусть o — центр приклеваемого диска $X \setminus Y$.
Тогда $X \setminus \{o\} \sim Y$ (деформационная ретракция).
$\implies \pi_1(Y) = \pi_1(X \setminus \{o\}) =: G$.
Дальше будем вместо $\pi_1(Y)$ использовать $\pi_1(X \setminus \{o\})$.

Сюръективность in_*.
Она равносильна такому утверждению: любая петля из $\Omega(X, x_0)$ гомотопна такой, которая содержится в Y.
Вместо Y можно взять $X \setminus \{o\}$.
Факт верен по лемме о свободной точке (см. доказательство односвязности сферы): малым шевелением петля переводится в гомотопную петлю, которая вблизи o состоит из отрезков. Еще одним малым шевелением сделаем, чтобы отрезки обходили o.



$in_*\colon \pi_1(Y, \cancel{y_0}\, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$

$\mathrm{Im}(in_*) \cong \pi_1(Y, x_0)/\ker(in_*)$

$\mathrm{Im}(in_*) = \pi_1(X)$

$\ker(in_*) = N([\alpha])$

Доказательство — 2

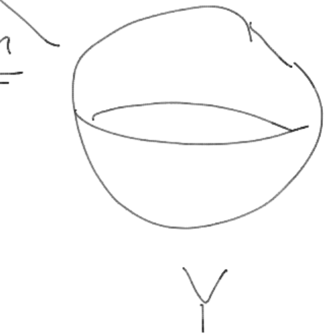
Вычисление $\ker(in_*)$, начало

Так как α продолжается до отображения из D^2 в X, она стягиваема в X

$\implies$ $[\alpha] \in \ker(in_*)$

$\implies$ $N([\alpha]) \subset \ker(in_*)$ (ядро — нормальная подгруппа).

Осталось доказать включение $\ker(in_*) \subset N([\alpha])$



Т. о клеточной аппроксимации

X, Y – клет., $f: X \to Y$ непр.

$\Rightarrow \exists\, f_1 \sim f$, $f_1(X_k) \subset Y_k$ $\forall k$

Вычисление $\ker(in_*)$, начало

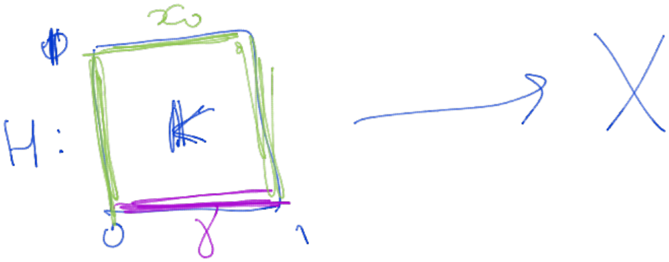
Так как α продолжается до отображения из D^2 в X, она стягиваема в X

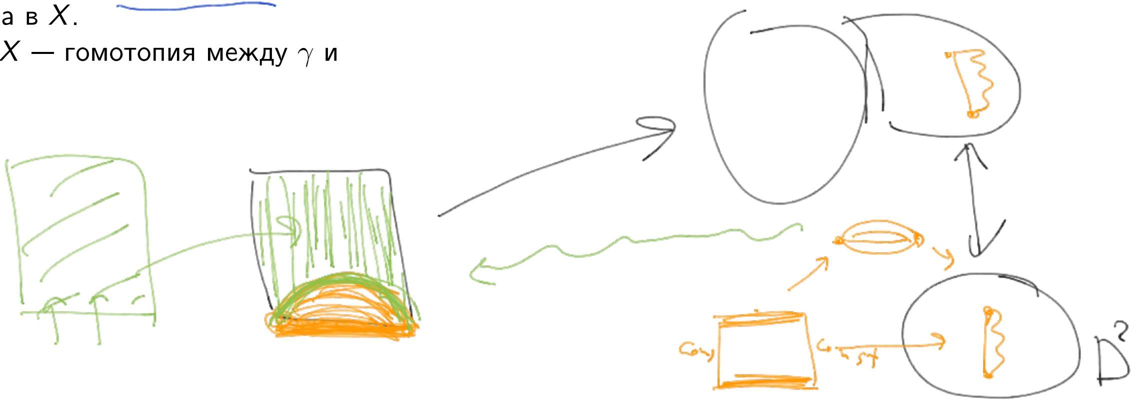
$\implies$ $[\alpha] \in \ker(in_*)$

$\implies$ $N([\alpha]) \subset \ker(in_*)$ (ядро — нормальная подгруппа).

Осталось доказать включение $\ker(in_*) \subset N([\alpha])$

Пусть $\gamma \in \Omega(Y, x_0)$ — такая петля, что $[\gamma] \in \ker(in_*)$.
Это означает, что γ стягиваема в X.
Пусть $H\colon K = [0,1] \times [0,1] \to X$ — гомотопия между γ и постоянной петлёй.





Доказательство — 2

Вычисление $\ker(in_*)$, начало

Так как α продолжается до отображения из D^2 в X, она стягиваема в X

$\implies$ $[\alpha] \in \ker(in_*)$

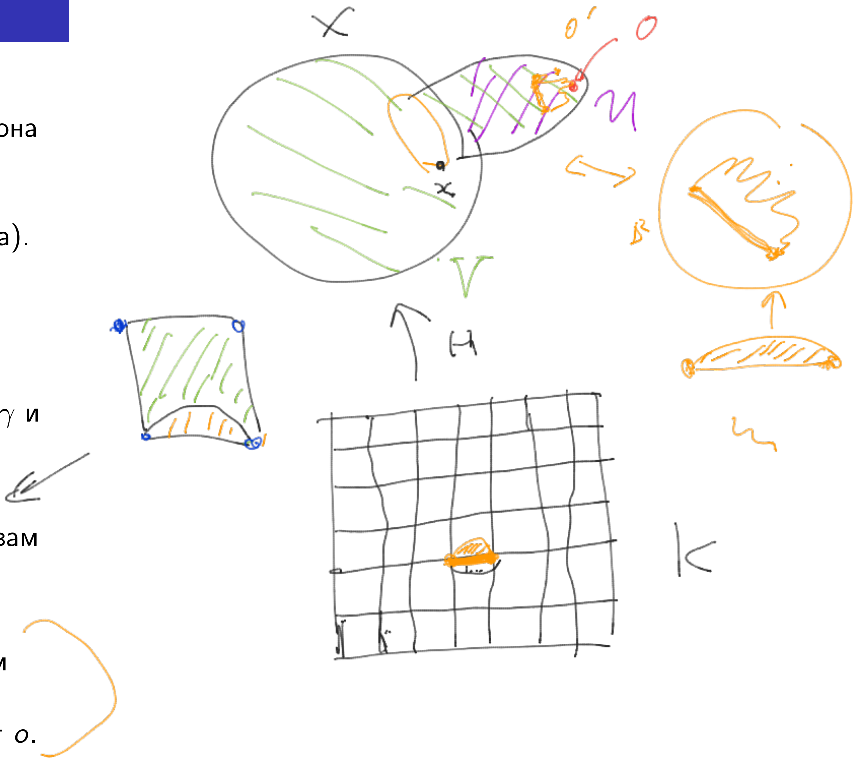
$\implies$ $N([\alpha]) \subset \ker(in_*)$ (ядро — нормальная подгруппа).

Осталось доказать включение $\ker(in_*) \subset N([\alpha])$

Пусть $\gamma \in \Omega(Y, x_0)$ — такая петля, что $[\gamma] \in \ker(in_*)$. Это означает, что γ стягиваема в X.
Пусть $H\colon K = [0,1] \times [0,1] \to X$ — гомотопия между γ и постоянной петлёй.

Покроем X открытыми множествами $U = X \setminus Y$ и $V = X \setminus \{o\}$ и применим лемму Лебега к их прообразам при H. Получим такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара в K содержится в U или V.

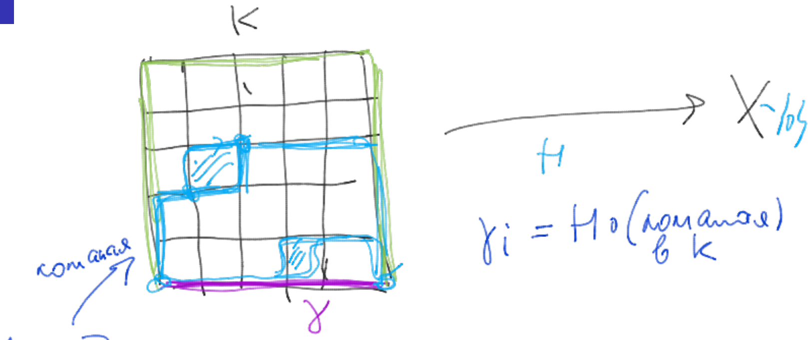
Разобьем K на квадратики диаметра меньше δ, будем называть сеткой объединение их сторон. Малым шевелением сделаем так, что образ сетки не задевает o.



Доказательство — 3

Вычисление $\ker(in_*)$, продолжение

Построим в $X \setminus \{o\}$ последовательность петель
$\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N = const$,
где каждая γ_i — H-образ ломаной на сетке, отличающейся от предыдущей на один квадратик.
Докажем, что в группе G элементы $[\gamma_i]$ и $[\gamma_{i+1}]$ отличаются умножением на элемент из $N([\alpha])$.



$[\gamma_0], [\gamma_1], \ldots, [\gamma_N] \in \pi_1(Y)$

$[\gamma_0] = [\gamma]$, $[\gamma_N] = e$

$\gamma_i \in \Omega(Y, y_0)$

$[\gamma_i] \in \pi_1(Y, y_0)$

Доказательство — 3

Вычисление $\ker(in_*)$, продолжение

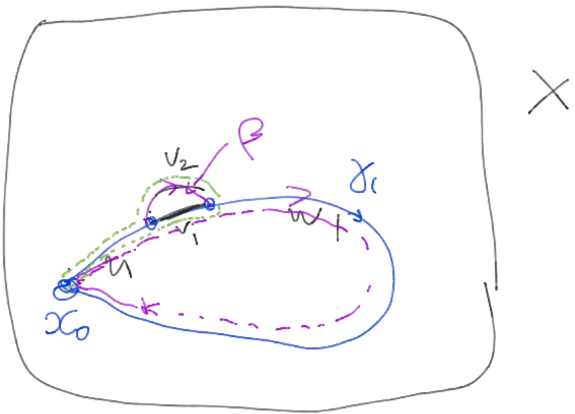
Построим в $X \setminus \{o\}$ последовательность петель
$\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N = const$,
где каждая γ_i — H-образ ломаной на сетке,
отличающейся от предыдущей на один квадратик.
Докажем, что в группе G элементы $[\gamma_i]$ и $[\gamma_{i+1}]$
отличаются умножением на элемент из $N([\alpha])$.

Запишем $\gamma_i = uv_1w$, $\gamma_{i+1} = uv_2w$, где u, v_1, v_2, w — пути,
u и w — общие части γ_i и γ_{i+1},
v_1 и v_2 — отличающиеся участки.

Тогда $\gamma_{i+1} \sim uv_2v_1^{-1}u^{-1}\gamma_i$.
Т.е. $[\gamma_i]$ и $[\gamma_{i+1}]$ отличаются умножением на $[uv_2v_1^{-1}u^{-1}]$.
Осталось доказать, что $[uv_2v_1^{-1}u^{-1}] \in N([\alpha])$.

Обозначим $\beta = v_2v_1^{-1}$, в новых обозначениях надо
доказать, что $[u\beta u^{-1}] \in N([\alpha])$.

Все классы гомотопности — в пространстве $X \setminus \{o\}$



$$[\gamma_{i+1}] = [u\beta u^{-1}][\gamma_i]$$

$$\beta = \beta(i)$$

$$[\gamma_i] = [u^{-1}\beta u][\gamma_{i+1}]$$

Доказательство — 4

Вычисление $\ker(in_*)$, почти финал

Петля β — образ границы маленького квадратика $\implies$ она содержится и стягиваема в $U = X \setminus Y$ или в $V = X \setminus \{o\}$.

Доказательство — 4

Вычисление $\ker(in_*)$, почти финал

Петля β — образ границы маленького квадратика $\implies$ она содержится и стягиваема в $U = X \setminus Y$ или в $V = X \setminus \{o\}$.

Если β стягиваема в V, то $u\beta u^{-1}$ тоже.
$\implies$ $[u\beta u^{-1}]$ — единица группы $G = \pi_1(V)$.

β — затягивается диском

в $V = X \setminus \{o\}$.

$\Downarrow$

β — стягиваема в $X \setminus \{o\}$.

$\Downarrow$

$\beta \sim const$

$\Downarrow$

$u\beta u^{-1} \sim const$

Вычисление $\ker(in_*)$, почти финал

Петля β — образ границы маленького квадратика $\implies$ она содержится и стягиваема в $U = X \setminus Y$ или в $V = X \setminus \{o\}$.

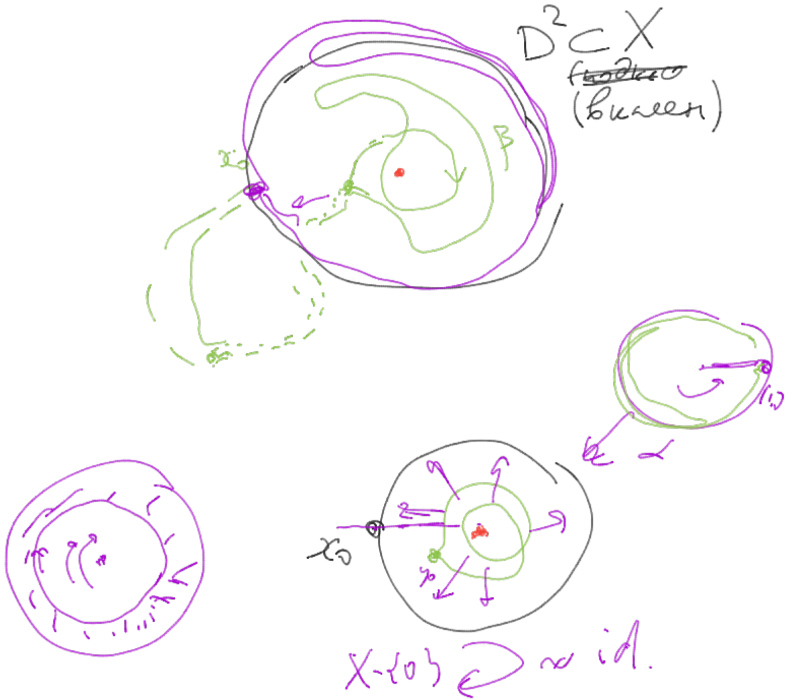
Если β стягиваема в V, то $u\beta u^{-1}$ тоже.
$\implies$ $[u\beta u^{-1}]$ — единица группы $G = \pi_1(V)$.

Если β лежит в диске U, то она содержится в $U \setminus \{o\}$. Подкруткой в диске и радиальной проекцией она переводится в петлю $\beta_1 = \alpha \circ \theta$, где $\theta \in \Omega(\mathbb{S}^1, (1,0))$.

Это реализуется гомотопией, определенной на всём $X \setminus \{o\}$, при этой гомотопии u переходит в некоторую петлю $u_1 \in \Omega(Y, x_0)$.

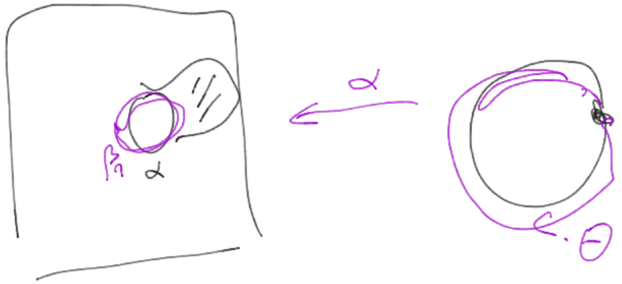
$\implies$ петля $u\beta u^{-1}$ гомотопна произведению петель $u_1\beta_1 u_1^{-1}$, где $\beta_1 = \alpha \circ \theta$.

Осталось доказать, что $[u_1\beta_1 u_1^{-1}] \in N([\alpha])$.



Вычисление $\ker(in_*)$, финал

θ гомотопна n-кратному обходу окружности (для некоторого $n \in \mathbb{Z}$) $\implies \beta_1 \sim \alpha^n$
$\implies u_1\beta_1u_1^{-1} \sim u_1\alpha^n u_1^{-1}$
$\implies [u_1\beta_1u_1^{-1}]$ и $[\alpha]^n$ сопряжены в G
$\implies [u_1\beta_1u_1^{-1}] \in N([\alpha])$.



Доказательство — 5

Вычисление $\ker(in_*)$, финал

θ гомотопна n-кратному обходу окружности (для некоторого $n \in \mathbb{Z}$) $\implies \beta_1 \sim \alpha^n$
$\implies u_1\beta_1 u_1^{-1} \sim u_1\alpha^n u_1^{-1}$
$\implies [u_1\beta_1 u_1^{-1}]$ и $[\alpha]^n$ сопряжены в G
$\implies [u_1\beta_1 u_1^{-1}] \in N([\alpha])$.

Итак, в последовательности $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_N] \in G$ каждые два соседних отличаются умножением на элемент $N([\alpha])$.

При этом $[\gamma_N] = e \implies [\gamma_1] \in N([\alpha])$.

Но $[\gamma_1] = [\gamma]$, это был произвольный элемент из $\ker(in_*)$
$\implies \ker(in_*) \subset N([\alpha])$.

Теорема доказана

Для записей

Любая группа реализуется как фундаментальная группа

Определение

Группа называется **конечно представленной**, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

Любая группа реализуется как фундаментальная группа

Определение

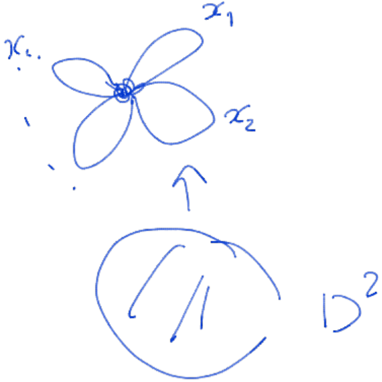
Группа называется конечно представленной, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

Следствие

Любая конечно представленная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого конечного клеточного пространства размерности 2.

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid w_1, w_2, \dots, w_N \rangle$$

$$w_1 = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_1^{k_3} \dots$$



Любая группа реализуется как фундаментальная группа

Определение

Группа называется конечно представленной, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

Следствие

Любая конечно представленная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого конечного клеточного пространства размерности 2.

Доказательство.

Строим букет окружностей, соответствующих образующим.
Приклеиваем к ним двумерные клетки по петлям, соответствующим соотношениям. □