Содержание

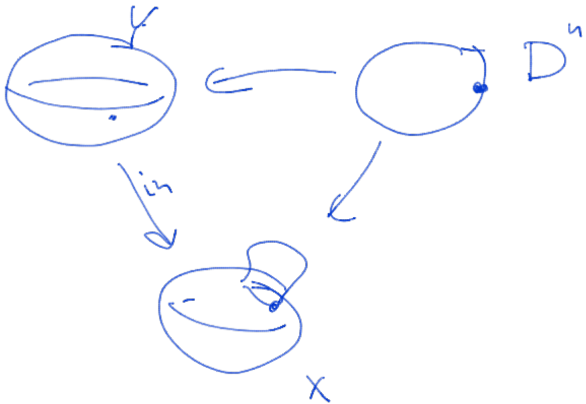
Приклеивание клеток старшей размерности

Теорема

При приклеивании клетки размерности $n \geq 3$ фундаментальная группа не меняется.

Доказательство — 1

Аналогично предыдущей теореме, пусть Y — топологическое пространство, X получается приклеиванием к Y диска D^n по отображению $\alpha\colon \mathbb{S}^{n-1} \to Y$. Выберем отмеченную точку x_0 в образе α и докажем, что гомоморфизм $in_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ — изоморфизм.



Доказательство — 1

Аналогично предыдущей теореме, пусть Y — топологическое пространство, X получается приклеиванием к Y диска D^n по отображению $\alpha\colon \mathbb{S}^{n-1} \to Y$. Выберем отмеченную точку x_0 в образе α и докажем, что гомоморфизм $in_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ — изоморфизм.

Сюръективность — аналогично предыдущей теореме.

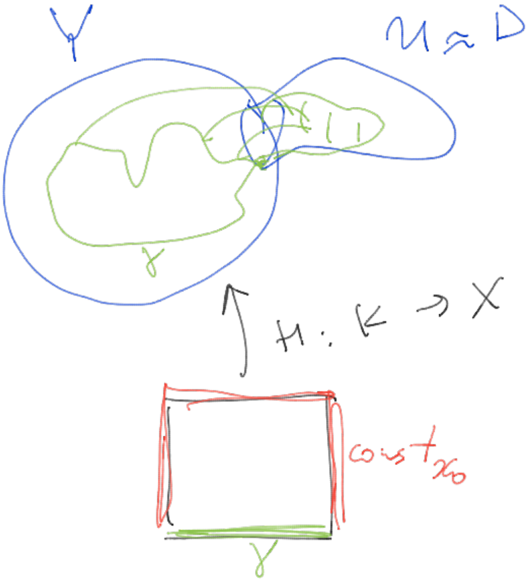
Доказательство — 1

Аналогично предыдущей теореме, пусть Y — топологическое пространство, X получается приклеиванием к Y диска D^n по отображению $\alpha\colon \mathbb{S}^{n-1} \to Y$. Выберем отмеченную точку x_0 в образе α и докажем, что гомоморфизм $in_*\colon \underbrace{\pi_1(Y, x_0)} \to \pi_1(X, x_0)$ — изоморфизм.

Сюръективность — аналогично предыдущей теореме.

Осталось доказать, что $\ker(in_*) = \{e\}$.
Пусть $\boxed{\gamma \in \Omega(Y, x_0)}$, $[\gamma] \in \ker(in_*)$.
$\implies$ γ стягиваема в X.
$\implies$ существует $H\colon K = [0,1] \times [0,1] \to X$ такое, что $H(\cdot, 0) = \gamma$, а на трёх остальных сторонах K отображение H — константа x_0.

? γ стяг. в $X \Rightarrow \gamma$ стяг. в Y.

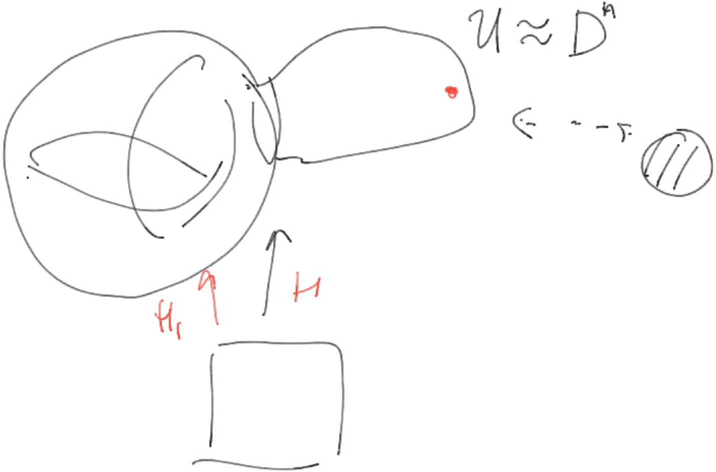


Доказательство — 2: лемма о свободной точке

Рассмотрим $U = X \setminus Y$. Это множество отождествляется с открытым шаром в $\mathbb{R}^n$ (внутренностью D^n) с помощью приклеивающего отображением.
Будем пользоваться этим отождествлением, чтобы говорить об отрезках и т.п. структурах в U.

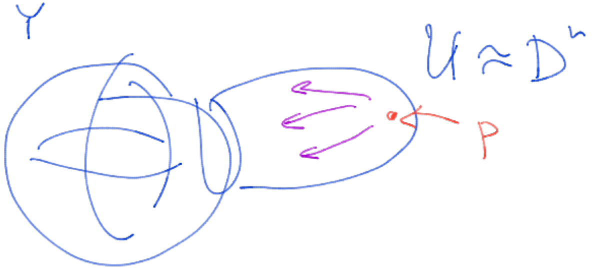
Лемма

Существует $H_1 : K \to X$, совпадающее с H на краю K и такое, что образ H не покрывает U.



Доказательство — 2: лемма о свободной точке

Рассмотрим $U = X \setminus Y$. Это множество отождествляется с открытым шаром в $\mathbb{R}^n$ (внутренностью D^n) с помощью приклеивающего отображением.
Будем пользоваться этим отождествлением, чтобы говорить об отрезках и т.п. структурах в U.



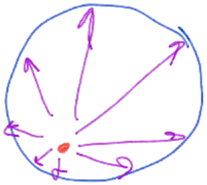
Лемма

Существует $H_1 : K \to X$, совпадающее с H на краю K и такое, что образ H не покрывает U.

$\varphi : X \setminus \{p\} \to Y$

ретракция

Из леммы следует теорема: Пусть образ H_1 не покрывает точку $p \in U$, тогда рассмотрим $\boxed{H_2 = \varphi \circ H_1}$, где $\varphi : X \to X$ — радиальная проекция из p внутри диска U и тождественно снаружи.



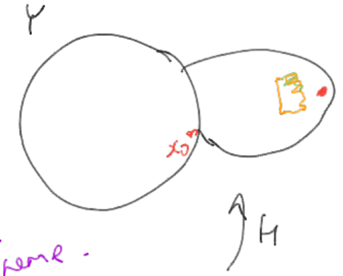
Получили гомотопию H_2, которая стягивает γ в Y.
$\implies [\gamma] = e$ в $\pi_1(Y) \implies \ker(in_*) = \{e\}$.

Доказательство леммы о свободной точке

Аналогично предыдущей теореме, покроем X открытыми множествами U и $V = X \setminus \{o\}$, где $o \in U$, и применим лемму Лебега. Получим такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара в K содержится в U или V. Разобьем K на квадратики диаметра меньше $\delta/2$, объединение их границ назовём сеткой.

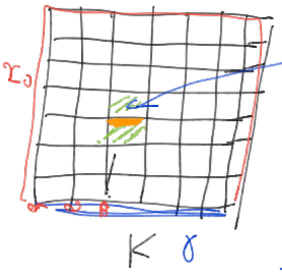
в пред. теореме.

Аналогично предыдущей теореме, малым шевелением сделаем так, чтобы каждый отрезок сетки, у которого образы обоих соседних квадратиков попадают в U, отображался в отрезок в U.



$U \simeq$ (откр шар).

$V = X \setminus \{o\}$



откр

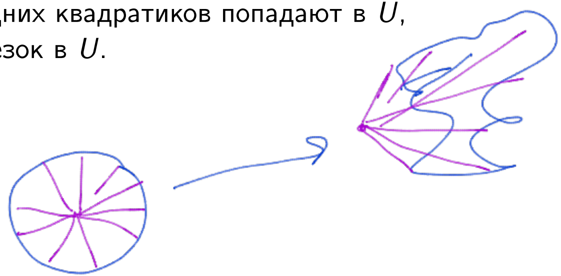
K_i

$h : K_i \to D^n$

$f : \partial K_i \to D^n$

Надо: $\exists\, h_1 : K_i \to D^n$

$h_1|_{\partial K_i} = f$



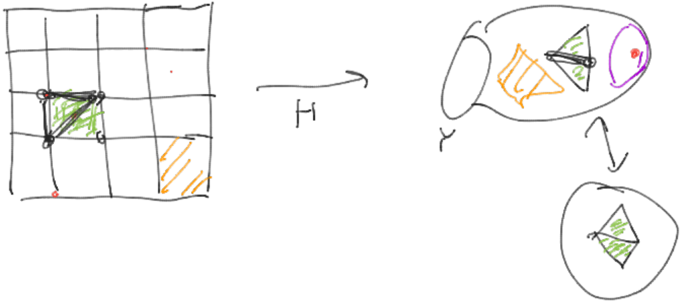
Доказательство леммы о свободной точке

Аналогично предыдущей теореме, покроем X открытыми множествами U и $V = X \setminus \{o\}$, где $o \in U$, и применим лемму Лебега. Получим такое $\delta > 0$, что H-образ любого δ-шара в K содержится в U или V. Разобьем K на квадратики диаметра меньше $\delta/2$, объединение их границ назовём сеткой.

Аналогично предыдущей теореме, малым шевелением сделаем так, чтобы каждый отрезок сетки, у которого образы обоих соседних квадратиков попадают в U, отображался в отрезок в U.

После этого каждый квадратик, отображающийся в U, разобьем диагональю на два треугольника и отобразим эти треугольники в U аффинным отображением с заданными значениями в вершинах (аффиное — с учетом отождествления U с шаром в $\mathbb{R}^n$).

Теперь образ K вблизи o покрывается «плоскими» треугольниками, они не могут покрывать окрестность o (например, по теореме Бэра). Теорема доказана.



Для записей

Для записей

Фундаментальная группа клеточного пространства

Следствие

Фундаментальная группа конечного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе 2-мерного остова.

Фундаментальная группа клеточного пространства

Следствие

Фундаментальная группа конечного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе 2-мерного остова.

Следствие

Фундаментальная группа конечного клеточного пространства — конечно представленная группа.

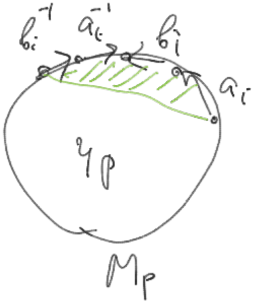
∀ реализуется

Содержание

Фундаментальные группы поверхностей

Напоминание

- M_p — ориентируемая поверхность рода p (сфера с p ручками) — склеивается из $4p$-угольника со схемой склейки $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$.
- N_q — ориентируемая поверхность рода q (сфера с q плёнками) — склеивается из $2q$-угольника со схемой склейки $a_1^2 a_2^2 \dots a_q^2$.



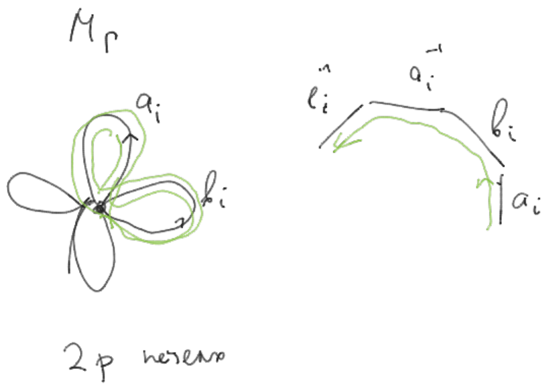
Фундаментальные группы поверхностей

Напоминание

- M_p — ориентируемая поверхность рода p (сфера с p ручками) — склеивается из $4p$-угольника со схемой склейки $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$.
- N_q — ориентируемая поверхность рода q (сфера с q плёнками) — склеивается из $2q$-угольника со схемой склейки $a_1^2 a_2^2 \dots a_q^2$.

Следствие

- *$\pi_1(M_p)$ — группа с $2p$ образующими $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ и одним соотношением: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$.*
- *$\pi_1(N_q)$ — группа с q образующими $a_1, \dots, a_q$ и одним соотношением: $a_1^2 a_2^2 \dots a_q^2$.*



Они не изоморфны

Теорема

Группы $\pi_1(\mathbb{S}^2)$, $\pi_1(M_p)$ $(p \in \mathbb{N})$, $\pi_1(N_q)$ $(q \in \mathbb{N})$ *попарно не изоморфны.*
Как следствие, поверхности $\mathbb{S}^2$, M_p $(p \in \mathbb{N})$, N_q $(q \in \mathbb{N})$ *попарно не гомеоморфны.*

S^2

$M_1, M_2, M_3, \ldots$

$N_1, N_2, \ldots$

Они не изоморфны

Теорема

Группы $\pi_1(\mathbb{S}^2)$, $\pi_1(M_p)$ $(p \in \mathbb{N})$, $\pi_1(N_q)$ $(q \in \mathbb{N})$ *попарно не изоморфны.*
Как следствие, поверхности $\mathbb{S}^2$, M_p $(p \in \mathbb{N})$, N_q $(q \in \mathbb{N})$ *попарно не гомеоморфны.*

Замечание

Информация: изоморфность групп, заданных образующими и соотношениями — алгоритмически неразрешимая задача (она сводится к проблеме остановки машины Тьюринга).

Абелианизация группы

Определение

Пусть G — группа. Ее абелианизация — это группа

$$G_{ab} = G/[G, G],$$

где $[G, G]$ — коммутаторная подгруппа (коммутант).

$xyx^{-1}y^{-1}$

Факты из алгебры

1. G_{ab} — абелева группа.

Факты из алгебры

1. G_{ab} — абелева группа.
2. $(F_k)_{ab} \simeq \mathbb{Z}^k$.

Факты из алгебры

1. G_{ab} — абелева группа.
2. $(F_k)_{ab} \simeq \mathbb{Z}^k$.
3. Если G задана множеством образующих $S \subset G$ и некоторыми соотношениями, то абелианизация получается добавлением всех соотношений вида $xyx^{-1}y^{-1}$, где $x, y \in S$, (термин: соотношения коммутирования).

Доказательство.

Это алгебра.
Если не было и не очевидно — спрашивайте. □

$G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid \ldots \rangle$

$G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid \ldots, x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}, \ldots \rangle$

Доказательство теоремы

Вычислим абелианизации групп $\pi_1(\mathbb{S}^2)$, $\pi_1(M_p)$, $\pi_1(N_q)$ и убедимся, что не изоморфны.

Доказательство теоремы

Вычислим абелианизации групп $\pi_1(\mathbb{S}^2)$, $\pi_1(M_p)$, $\pi_1(N_q)$ и убедимся, что не изоморфны.

$(\pi_1(M_p))_{ab}$ задаётся образующими $a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p$, соотношениями коммутирования между ними, и исходным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$. Это соотношение следует из соотношений коммутирования, поэтому его можно вычеркнуть.

Получается $(F_{2p})_{ab} \simeq \mathbb{Z}^{2p}$.

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p \mid - - - \quad a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}, \; b_i b_j b_i^{-1} b_j^{-1}, \; a_i b_j a_i^{-1} b_j^{-1} \rangle$$

$$\cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p \mid \text{коммутирование } a_i, b_i \rangle$$

$$\cong (F_{2p})_{ab} = \mathbb{Z}^{2p}$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Доказательство теоремы

Вычислим абелианизации групп $\pi_1(\mathbb{S}^2)$, $\pi_1(M_p)$, $\pi_1(N_q)$ и убедимся, что не изоморфны.

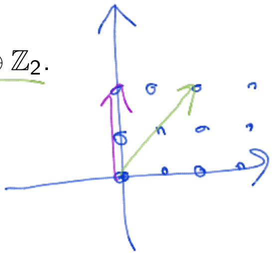
$(\pi_1(M_p))_{ab}$ задаётся образующими $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$, соотношениями коммутирования между ними, и исходным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$. Это соотношение следует из соотношений коммутирования, поэтому его можно вычеркнуть.

Получается $(F_{2p})_{ab} \simeq \mathbb{Z}^{2p}$.

$(\pi_1(\cancel{M_p}\, N_q))_{ab}$ заадаётся образующими $a_1, \dots, a_q$, соотношениями коммутирования между ними, и исходным соотношением $a_1^2 a_2^2 \dots a_q^2$.

Получается группа $\mathbb{Z}^q/(2, \dots, 2) \simeq \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

$$\mathbb{Z}^q/(2,\dots,2) \simeq \mathbb{Z}^q/(0,\dots,0,2) = \mathbb{Z}^{q-1} \oplus (\mathbb{Z}/(2))$$



$$G_{ab} = \langle a_1,\dots,a_q \mid \text{коммутирование}, a_1^2\dots a_q^2 \rangle$$

$$= \mathbb{Z}^q/(2,2,\dots,2) \cong$$

$$\simeq \boxed{\mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2}, \quad \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$\exists$ изоморфизм $F : \mathbb{Z}^q \circlearrowleft$

$$F(2,2,\dots,2) = (2,0,\dots,0)$$

$$F(x_1,x_2,\dots,x_q) = (x_1, x_2-x_1, x_3-x_1, \dots, x_q-x_1)$$

Доказательство теоремы

Вычислим абелианизации групп $\pi_1(\mathbb{S}^2)$, $\pi_1(M_p)$, $\pi_1(N_q)$ и убедимся, что не изоморфны.

$(\pi_1(M_p))_{ab}$ задаётся образующими $a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p$, соотношениями коммутирования между ними, и исходным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$. Это соотношение следует из соотношений коммутирования, поэтому его можно вычеркнуть.

Получается $(F_{2p})_{ab} \simeq \mathbb{Z}^{2p}$.

$(\pi_1(\cancel{M_p}\,N_q))_{ab}$ за~~а~~даётся образующими $a_1, \ldots, a_q$, соотношениями коммутирования между ними, и исходным соотношением $a_1^2 a_2^2 \ldots a_q^2$.

Получается группа $\mathbb{Z}^q/(2, \ldots, 2) \simeq \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

$(\pi_1(S^2))_{ab}$ тривиальна.

Из классификации конечно порождённых абелевых групп получившиеся группы не изоморфны.
Теорема доказана

Для записей 1

$$F_q = \langle a_1, \dots, a_q \rangle$$

$$\begin{tikzcd}
F_q \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[dd, bend right] & F_q / N(\text{комм.}, a_1^2 \dots a_1^2) \\
\boxed{F_q/[F_q, F_q] \simeq \mathbb{Z}^q} \arrow[d] & \\
\big(F_q/[F_q, F_q]\big) / \Phi(a_1^2 \dots a_q^2) &
\end{tikzcd}$$

$$\Phi(a_1^2 \dots a_q^2) = (2, 2, \dots, 2)$$