Содержание

Определение

Всюду далее X — евклидово пространство.

Определение

Угол между ненулевыми векторами $x, y \in X$ — это

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$$

Определение корректно в силу КБШ.

Эквивалентная формула:

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \angle(x, y)$$

Свойства

- $\angle(x, y) \in [0, \pi]$
- $\angle(x, ay) = \angle(x, y)$ при $a > 0$.
- $\angle(x, ay) = \pi - \angle(x, y)$ при $a < 0$.
- Теорема косинусов
  $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \angle(x, y)$

Неравенство треугольника для углов

Теорема

Для любых ненулевых $x, y, z \in X$

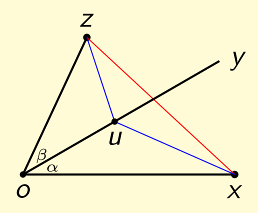
$$\angle(x, z) \leq \angle(x, y) + \angle(y, z)$$

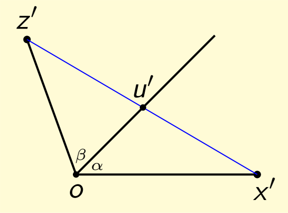
Замечание

Это позволяет определить угловую метрику на сфере: $d_\angle(x, y) = \angle(x, y)$.

Доказательство неравенства треугольника для углов

Пусть $\alpha = \angle(x, y)$, $\beta = \angle(y, z)$, $\gamma = \angle(x, z)$.
Можно считать, что $\alpha + \beta < \pi$, иначе неравенство тривиально.

в X: 

в $\mathbb{R}^2$: 

Построим в $\mathbb{R}^2$: $|x'| = |x|$, $|z'| = |z|$, $\angle(x', z') = \alpha + \beta$,
$u' \in [x'z']$, $\angle(x', u') = \alpha$. Построим в X: $u \upuparrows y$, $|u| = |u'|$.

По теореме косинусов $|x - u| = |x' - u'|$, $|u - z| = |u' - z'|$

$\implies$ $|x - z| \le |x' - z'|$ (неравенство треугольника)

$\implies$ $\angle(x, z) \le \angle(x', z') = \alpha + \beta$ (теорема косинусов)

Забытый случай равенства

Замечание

Из доказательства видно, что в случае равенства векторы x, y, z линейно зависимы.

Замечание

Полное описание случая равенства: $\angle(x, z) = \angle(x, y) + \angle(y, z)$ тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из двух:

- y равно линейной комбинации x и z с неотрицательными коэффициентами;
- x и z противоположно направлены.

Периметр сферического треугольника

Следствие

Для любых ненулевых $x, y, z \in X$

$$\angle(x, z) + \angle(x, y) + \angle(y, z) \leq 2\pi$$

Доказательство.

Неравенство треугольника для углов между x, $-y$, z. □

Задача

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ удовлетворяют трём неравенствам треугольника ($\alpha + \beta \geq \gamma$ и т. д.) и $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$.
Тогда в $\mathbb{R}^3$ существуют три единичных вектора, углы между которыми равны α, β, γ.

Содержание

Ортогональные векторы

Определение

Векторы $x, y \in X$ ортогональны, если $\langle x, y \rangle = 0$.
Обозначение: $x \perp y$.

Свойства:

- Нулевой вектор ортогонален любому.
- Если вектор x ортогонален каждому из векторов $v_1, \ldots, v_n$, то он ортогонален любой их линейной комбинации.
- Теорема Пифагора
  Если $x \perp y$, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$
- Следствие
  Если векторы $v_1, \ldots, v_n$ попарно ортогональны, то $|v_1 + \ldots + v_n|^2 = |v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2$

Ортонормированные наборы

Определение

Ортонормированный набор векторов — такой, в котором

- каждые два вектора ортогональны
- все векторы имеют длину 1.

Пример

В $\mathbb{R}^n$ стандартный базис — ортонормированный.

Разложение по ортонормированному набору

Теорема

Пусть $v_1, \dots, v_n$ *— ортонормированный набор,*
$x = \sum a_i v_i, \quad y = \sum b_i v_i \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R})$. *Тогда*

$$\langle x, y \rangle = \sum a_i b_i$$

$$|x|^2 = \sum a_i^2$$

Доказательство.

Раскрытие скобок. $\square$

Линейная независимость

Теорема

Любой ортонормированный набор линейно независим.

Доказательство.

Пусть $v_1, \dots, v_n$ — ортонормированный набор, и линейная комбинация $\sum a_i v_i$ равна нулевому вектору. Тогда

$$\sum a_i^2 = |0|^2 = 0$$

$\implies$ все a_i равны 0. $\square$

Содержание

Теорема об ортогонализации

Теорема (ортогонализация по Граму-Шмидту)

Для любого линейно независимого набора векторов $v_1, \dots, v_n$ *существует единственный ортонормированный набор* $e_1, \dots, e_n$ *такой, что для каждого* $k = 1, \dots, n$

- $\mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k)$
- $\langle v_k, e_k \rangle > 0$.

Обозначение

Lin — линейная оболочка.

Замечание

$e_1, \dots, e_k$ зависят только от $v_1, \dots, v_k$.
(Это следует из вида условий и единственности.)

Доказательство – 1: конструкция

$e_1 := \dfrac{v_1}{|v_1|}$. Далее по индукции, пусть $e_1, \ldots, e_{k-1}$ построены. Строим сначала вектор w_k:

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i \rangle e_i$$

Он ортогонален $e_1, \ldots, e_{k-1}$:

$$\langle w_k, e_j \rangle = \langle v_k, e_j \rangle - \sum \langle v_k, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

Верно, что $w_k \neq 0$, иначе $v_k \in \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_{k-1})$. Положим

$$e_k := \frac{w_k}{|w_k|}$$

Получился ортонормированный набор $e_1, \ldots, e_k$.

Доказательство – 2: проверка условий

1. Линейные оболочки: По построению

$$\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_{k-1}, w_k) = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k)$$

Левая часть $= \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k)$ по построению.

Правая часть $= \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ по индукционному предположению.

2. Острые углы: v_k выражается через $e_1, \ldots, e_k$:

$$v_k = ce_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i e_i$$

где $c = |w_k| > 0$, $c_i = \langle v_k, e_i \rangle$. Отсюда $\langle v_k, e_k \rangle = c > 0$.

Доказательство – 3: единственность

Вектор e_k должен быть линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k$:

$$e_k = av_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i$$

$$\langle e_k, e_j \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad a\langle v_k, e_j \rangle + a_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k-1)$$

Эти уравнения однозначно определяют отношения a_j/a.

Т.е. набор $a, a_1, \ldots, a_{k-1}$ определен однозначно с точностью до пропорциональности.

Коэффициент пропорциональности определяется однозначно из единичности нормы и $\langle v_k, e_k \rangle > 0$. $\square$

Существование ортонормированных базисов

Следствие

Пусть X — конечномерное евклидово пространство. Тогда в X

1. *существует ортонормированный базис;*
2. *любой ортонормированный набор можно дополнить до ортонормированного базиса.*

Доказательство.

1. Выберем любой базис и ортогонализуем.
2. Дополним до произвольного базиса и ортогонализуем.
Начальный ортонормированный набор не изменится. $\square$

Содержание

Изоморфизм

Определение

Евклидовы пространства X и Y изоморфны, если существует линейная биекция $f\colon X \to Y$, сохраняющая скалярное произведение:

$$\langle f(v), f(w)\rangle_Y = \langle v, w\rangle_X$$

для любых $v, w \in X$.
Такое f называется изоморфизмом (евклидовых пространств).

Замечание

Изоморфность — отношение эквивалентности.

Замечание

У изоморфных пространств одинаковы все свойства, которые можно определить через скалярные произведения.

Изоморфность конечномерных евклидовых пространств

Теорема

Пусть X, Y *— евклидовы пространства,* $\dim X = \dim Y < \infty$*.*
Тогда X *и* Y *изоморфны.*

Доказательство.

Пусть $\dim X = \dim Y = n$. Выберем ортонормированные базисы $e_1, \ldots, e_n \in X$ и $u_1, \ldots, u_n \in Y$.
Пусть $f : X \to Y$ — линейное отображение, переводящее e_i в u_i.

Пусть $v, w \in X$. Разложим по базису: $v = \sum a_i e_i$, $w = \sum b_i e_i$.
Тогда $f(v) = \sum a_i u_i$, $f(w) = \sum b_i u_i$,

$$\langle v, w \rangle = \sum a_i b_i = \langle f(v), f(w) \rangle$$

$\Longrightarrow$ f сохраняет скалярное произведение. $\square$

Следствие

Любое евклидово пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.

В частности, 2-мерное евклидово пространство изоморфно $\mathbb{R}^2$, и там выполняются все результаты планиметрии.

Соглашение

Далее все евклидовы пространства предполагаются конечномерными.