Содержание

Содержание

Ортогональное дополнение множества

Пусть X — евклидово пространство, $A \subset X$ — множество.

Определение

Ортогональное дополнение множества A — это

$$A^{\perp} = \{x \in X : \forall v \in A \ \ \langle x, v \rangle = 0\}$$

Свойства

- $A^{\perp}$ — линейное подпространство
- $A^{\perp} = \mathrm{Lin}(A)^{\perp}$

Ортогональное дополнение подпространства

Теорема

Пусть X — конечномерное евклидово пространство, $V \subset X$ — линейное подпространство. Тогда

1. $X = V \oplus V^{\perp}$
2. $(V^{\perp})^{\perp} = V$

Доказательство.

Пусть $n = \dim X$, $k = \dim V$.
Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$ в V, дополним до ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ в X. Тогда

$$V^{\perp} = \mathrm{Lin}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

Аналогично,

$$(V^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k) = V$$

□

Ортогональная проекция

Пусть $V \subset X$ — линейное подпространство, $x \in X$.
Так как $X = V \oplus V^\perp$, вектор x однозначно раскладывается в сумму

$$x = y + z, \qquad y \in V,\ z \in V^\perp$$

Определение

Вектор y из формулы — ортогональная проекция x на V.
Обозначение: $y = \mathrm{Pr}_V(x)$.

Переформулировка

$\mathrm{Pr}_V(x)$ — такой вектор $y \in V$, что $x - y \in V^\perp$.

Свойства

- $\mathrm{Pr}_V \colon X \to V$ — линейное отображение.
- $\mathrm{Pr}_V(x)$ — ближайшая к x точка из V.

Содержание

Гиперплоскости

Определение

Линейная гиперплоскость — линейное подпространство коразмерности 1 (т.е. размерности $\dim X - 1$).

Аффинная гиперплоскость — образ линейной гиперпоскости при параллельном переносе.

Замечание

Аналогично определяется понятие аффинного подпространства любой размерности.

Пока будем рассматривать только линейные.

Нормаль гиперплоскости

Определение

Нормаль линейной гиперплоскости H — любой ненулевой вектор $v \in H^{\perp}$.

Свойства

- Нормаль гиперплоскости существует, она единственна с точностью до пропорциональности.
- Если v — нормаль для H, то $H = v^{\perp} = \{x \in X : x \perp v\}$. (Нормаль задаёт гиперплоскость)

Это следует из теоремы об ортогональном дополнении: $\dim H^{\perp} = 1$, $H^{\perp} = \mathrm{Lin}(v)$, $v^{\perp} = (H^{\perp})^{\perp} = H$.

Соответствие между векторами и линейными функциями

Теорема (конечномерная лемма Рисса)

Пусть X — конечномерное евклидово пространство,
$L\colon X \to \mathbb{R}$ — линейное отображение.
Тогда существует единственный вектор $v \in X$ такой, что

$$L(x) = \langle v, x \rangle$$

для всех $x \in X$.

Переформулировка

Отображение $X \to X^*$, которое сопоставляет каждому вектору $v \in X$ линейную функцию $\langle v, \cdot \rangle$ — биекция между X и X^*.

Доказательство леммы Рисса

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис.

Положим $a_i = L(e_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Искомый вектор: $v = \sum a_i e_i$.

Почему он подходит: для $x = \sum x_i e_i$ (где $x_i \in \mathbb{R}$)

$$L(x) = \sum a_i x_i = \langle v, x \rangle$$

Единственность: пусть есть другой такой вектор v'.
Тогда $L(x) = \langle v, x \rangle = \langle v', x \rangle \implies \langle v - v', x \rangle = 0 \quad (\forall x \in X)$.
Подставим $x = v - v'$, получим $|v - v'|^2 = 0$, противоречие.

$\square$

Гиперплоскость — ядро линейной функции

Напоминание

Для линейного отображения $L\colon X \to Y$, $\ker L = L^{-1}(0)$,

$$\dim \ker L = \dim X - \dim L(X)$$

Следствие для $L\colon X \to \mathbb{R}$: $L \neq 0 \implies \ker L$ — гиперплоскость.

Теорема

1. *Любая линейная гиперплоскость имеет вид* $\ker L$, *где* $L\colon X \to \mathbb{R}$ — *линейное отображение,* $L \neq 0$.
2. L *определено однозначно с точностью до умножения на константу.*

Доказательство.

$L = \langle v, \cdot \rangle$, где v — нормаль. $\square$

Уравнение в координатах

Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Тогда $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$L(x) = \langle v, x \rangle = \sum a_i x_i$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки x,
$a_1, \dots, a_n$ — константы (координаты вектора v).

Отсюда следует общий вид уравнения линейной гиперплоскости в координатах $x_1, \dots, x_n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n = 0$$

где $a_1, \dots, a_n$ — коэффициенты, не все равные 0.

Эти коэффициенты — координаты нормали.

Расстояние до гиперплоскости

Теорема

Пусть $H = v^{\perp}$. *Тогда расстояние от* x *до* H *равно*

$$d(x, H) = \frac{|\langle v, x\rangle|}{|v|}$$

Или в координатах, где $a_1, \ldots, a_n$ *— координаты* v,

$$d(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

Доказательство формулы для расстояния

Доказываем формулу

$$d(x,H) = \frac{|\langle v,x\rangle|}{|v|}$$

Запишем $x = y + z$, где $y \in H$, $z \in H^{\perp}$.

$d(x,H) = |z|$, так как $y = \mathrm{Pr}_H(x)$ — ближайшая точка.

$\langle v,x\rangle = \langle v,y+z\rangle = \langle v,z\rangle = \pm|v||z|$,
так как $\langle v,y\rangle = 0$ и $z \in \mathrm{Lin}(v)$.

Отсюда

$$\frac{|\langle v,x\rangle|}{|v|} = |z| = d(x,H)$$

Аффинные гиперплоскости

Упражнение

Любая аффинная гиперплоскость имеет вид

$$H = \{x \in X : \langle v, x \rangle + c = 0\}$$

где v — ненулевой вектор, $c \in \mathbb{R}$.

Расстояние до нее задается формулой

$$d(x, H) = \frac{|\langle v, x \rangle + c|}{|v|}$$

Содержание

Определения

Пусть X, Y — евклидовы пространства.

Определение

Изометрическое отображение (изометрическое вложение) X в Y — линейное отображение из X в Y, сохраняющее скалярное произведение.
Ортогональное преобразование пространства X — изометрическое отображение из X в себя.

Очевидно, ортогональные преобразования X — группа относительно композиции.

Определение

Ортогональная группа порядка n — группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$.
Обозначение: $O(n)$.

Свойства

Пусть $f : X \to Y$ — линейное отображение. Тогда

- f изометрическое $\iff$ оно сохраняет длины векторов.
  - Из формулы
$$\langle x, y \rangle = \frac{|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2}{2} \qquad \square$$
- f изометрическое $\iff$ оно переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный набор
  - Было. $\square$

Содержание

Матрица изометрического отображения

Теорема

Пусть $f: X \to Y$ линейно, A — его матрица в ортонормированных базисах X и Y. Тогда f изометрическое $\iff$ $A^T A = E$.

Доказательство.

Пусть $A^T A = (c_{ij})$.
Тогда $c_{ij} = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle$, где $\{e_i\}$ — выбранный базис X. $\square$

Следствие

При $\dim X = \dim Y$ это равносильно тому, что $AA^T = E$ или $A^T = A^{-1}$.

Ортогональные матрицы

Определение

Ортогональная матрица — квадратная матрица A, для которой $A^TA = AA^T = E$.

Замечание

A ортогональная $\iff$ A^T ортогональная.

Эквивалентные переформулировки

- $AA^T = E$
- $A^TA = E$
- Столбцы ортонормированы
- Строки ортонормированы

Определитель ортогональной матрицы

Теорема

Если A — ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

Доказательство.

$\det(A^T A) = \det(E) = 1$
$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$ $\square$

Определение

Специальная ортогональная группа $SO(n)$ — группа ортогональных преобразований с определителем 1.

Содержание

Примеры ортогональных преобразований

Примеры ортогональных преобразований:

- id
- $-\mathrm{id}$ (центральная симметрия относительно 0)
- Поворот плоскости относительно 0
- Симметрия относительно линейного подпространства Y: id на Y, $-\mathrm{id}$ на $Y^{\perp}$.
- Пусть X разложено в ортогональную прямую сумму

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$$

и на каждом X_i задано ортогональное преобразование f_i.

Тогда есть ортогональное $f\colon X \to X$ такое, что $f|_{X_i} = f_i$.

Ортогональные преобразования плоскости

Матрица ортогонального преобразования $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

(других вариантов нет, так как столбцы должны быть ортонормированы).

Первое — поворот на угол α.
Второе — симметрия относительно прямой, образующей угол $\alpha/2$ с e_1.

Общий вид ортогонального преобразования

Теорема

Пусть $f: X \to X$ — ортогональное преобразование. Тогда существует разложение X в ортогональную прямую сумму

$$X = X_+ \oplus X_- \oplus \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_m \qquad (m \geq 0)$$

инвариантных (т.е. переходящих в себя) подпространств т.ч.

- $f|_{X_+} = \mathrm{id}$
- $f|_{X_-} = -\mathrm{id}$
- $\dim \Pi_i = 2$, $f|_{\Pi_i}$ *— поворот.*

Случай $\mathbb{R}^3$

В зависимости от m и размерностей X_+ и X_- в $\mathbb{R}^3$ есть такие случаи:

- $m = 1$, $\dim X_+ = 1$, $\dim X_- = 0$: поворот вокруг оси.
- $m = 1$, $\dim X_+ = 0$, $\dim X_- = 1$: «зеркальный поворот».
- $m = 0$, $\dim X_+ = 3$, $\dim X_- = 0$: id.
- $m = 0$, $\dim X_+ = 2$, $\dim X_- = 1$: симметрия отн. плоскости.
- $m = 0$, $\dim X_+ = 1$, $\dim X_- = 2$: симметрия отн. прямой (она же поворот на угол π)
- $m = 0$, $\dim X_+ = 0$, $\dim X_- = 3$: $-\mathrm{id}$

Задача

$SO(2)$ гомеоморфна S^1,
$SO(3)$ гомеоморфна RP^3.