# Содержание

# Содержание

# Общий вид ортогонального преобразования

## Теорема

*Пусть* $f : X \to X$ *— ортогональное преобразование. Тогда существует разложение* $X$ *в ортогональную прямую сумму*

$$X = X_+ \oplus X_- \oplus \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_m \qquad (m \geq 0)$$

*инвариантных (т.е. переходящих в себя) подпространств т.ч.*

- $f|_{X_+} = \mathrm{id}$
- $f|_{X_-} = -\mathrm{id}$
- $\dim \Pi_i = 2$, $f|_{\Pi_i}$ *— поворот.*

# Случай $\mathbb{R}^3$

В зависимости от $m$ и размерностей $X_+$ и $X_-$ в $\mathbb{R}^3$ есть такие случаи:

- $m = 1$, $\dim X_+ = 1$, $\dim X_- = 0$: поворот вокруг оси.
- $m = 1$, $\dim X_+ = 0$, $\dim X_- = 1$: «зеркальный поворот».
- $m = 0$, $\dim X_+ = 3$, $\dim X_- = 0$: id.
- $m = 0$, $\dim X_+ = 2$, $\dim X_- = 1$: симметрия отн. плоскости.
- $m = 0$, $\dim X_+ = 1$, $\dim X_- = 2$: симметрия отн. прямой (она же поворот на угол $\pi$)
- $m = 0$, $\dim X_+ = 0$, $\dim X_- = 3$: $-\mathrm{id}$

**Задача**

$SO(2)$ гомеоморфна $S^1$,
$SO(3)$ гомеоморфна $RP^3$.

# Доказательство теоремы – 1

**Определение**

Инвариантное подпространство линейного отображения $f\colon X\to X$ — линейное подпространство $V\subset X$ такое, что $f(V)\subset V$.

**Замечание**

Для ортогонального $f$ это равносильно тому, что $f(V)=V$.

**Свойство**

Если $V$ — инвариантное подпространство ортогонального преобразования, то $V^{\perp}$ — тоже инвариантное.

**Доказательство.**

Тривиально. $\square$

# Доказательство теоремы – 2

Определим $X_+ = \{x \in X : f(x) = x\}$. Это линейное подпространство.

В $X_+^\perp$ аналогично выделим $X_- = \{x \in X_+^\perp : f(x) = -x\}$. Это тоже линейное подпространство.

Остается инвариантное подпространство $Z = (X_+ \oplus X_-)^\perp$, где $f(x) \notin \{x, -x\}$ для любого $x \in Z \setminus \{0\}$.

Найдём в $Z$ инвариантную плоскость, дальше по индукции будет следовать теорема.

# Доказательство – 3: нахождение инвариантной плоскости

На сфере $\{|x| = 1\}$ рассмотрим функцию $\phi(v) = \angle(v, f(v))$.
По теореме Вейерштрасса у нее есть минимум.
Пусть $v_0$ — точка минимума, $\alpha = \phi(v_0) = \angle(v_0, f(v_0))$.

Пусть $v_1 = f(v_0)$, $v_2 = f(v_1)$. Тогда

$$\angle(v_1, v_2) = \angle(v_0, v_1) = \alpha.$$

Положим $w_1 = \frac{v_0+v_1}{|v_0+v_1|}$. Это биссектриса между $v_0$ и $v_1$. Пусть $w_2 = f(w_1)$, это биссектриса между $v_1$ и $v_2$.

По неравенству треугольника для углов
$\angle(w_1, w_2) \leq \angle(w_1, v_1) + \angle(v_1, w_2) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$

Равенство в неравенстве треугольника для углов
$\implies$ векторы $w_1$, $v_1$, $w_2$ лежат в одной плоскости (из док-ва).
$\implies$ $v_0, v_1, v_2$ в той же плоскости $\implies$ она инвариантна.

# Содержание

# Матрица Грама

## Определение

Пусть $v_1, \dots, v_n$ — набор векторов в евклидовом пространстве. Их **матрица Грама** — матрица $(g_{ij})$, где $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

## Задача

1. Если $v = \sum x_i v_i$ $(x_i \in \mathbb{R})$, то

$$|v|^2 = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$$

2. Матрица Грама невырождена $\iff$ векторы линейно независимы.

3. Если у двух наборов векторов матрицы Грама одинаковы, то один можно перевести в другой ортогональным преобразованием.

# Содержание

# Ориентации базисов

Пусть $X$ — векторное пространство

**Определение**

Два базиса одинаково ориентированы, если матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

**Теорема**

*Одинаковая ориентированность базисов — отношение эквивалентнтности. Классов эквивалентности ровно два (кроме случая* $\dim X = 0$*).*

**Доказательство.**

Матрицы перехода перемножаются. □

# Ориентация векторного пространства

## Определение

Ориентированное векторное пространство — векторное пространство, в котором выделен один из двух классов одинаково ориентированных базисов.
Выделенные базисы — положительно ориентированные (положительные),
остальные — отрицательно ориентированные (отрицательные).

## Пример

Стандартная ориентация $\mathbb{R}^n$ — та, в которой стандартный базис считается положительно ориентированным.

# Топология пространства базисов

**Задача**

1. Два базиса одинаково ориентированы $\iff$ их можно соединить путём в пространстве базисов.

2. Если они ортонормированные, то их можно соединить путём в пространстве ортонормированных базисов.

3. Группа $SO(n)$ линейно связна.

4. Группа $O(n)$ состоит из двух открытых компонент связности.

# Содержание

### Определение

Пусть $X$ — ориентированное евклидово пространство, $\dim X = n$, $v_1, \dots, v_n \in X$.
Смешанное произведение $v_1, \dots, v_n$ — определитель матрицы из координат $v_1, \dots, v_n$ в произвольном положительном ортонормированном базисе.
Обозначение: $[v_1, \dots, v_n]$.

### Замечание (без доказательства)

Это ориентированный объем параллелепипеда.

### Теорема

*Определение корректно (не зависит от выбора базиса)*

### Доказательство.

Допустимые матрицы перехода имеют определитель 1. $\square$

# Свойства смешанного произведения

Свойства смешанного произведения $[v_1, \dots, v_n]$
(они же свойства определителя):

- Линейность по каждому аргументу
- Кососимметричность: при перестановке любых двух аргументов меняет знак
- $[v_1, \dots, v_n] = 0 \iff$ векторы линейно зависимы
- $[v_1, \dots, v_n] > 0 \iff$ они образуют положительный базис

# Снова о матрице Грама

**Задача**

Пусть $\dim X = n$, $v_1, \dots, v_n \in X$,
$G$ — матрица Грама этих векторов. Тогда

$$\det G = [v_1, \dots, v_n]^2$$

# Содержание

# Векторное произведение

## Определение

Пусть $X$ — 3-мерное ориентированное евклидово пространство, $u, v \in X$.
Их векторное произведение — такой вектор $h \in X$, что $\langle h, x\rangle = [u, v, x]$ для любого $x \in X$.
Обозначение: $h = u \times v$.

## Замечание

Такой вектор существует и единственен по лемме Рисса.

# Свойства векторного произведения

Свойства векторного произведения ($\forall u, v, w \in X,\ a \in \mathbb{R}$)

- $\langle u \times v, w \rangle = [u, v, w]$ (прямо по определению).
- Кососимметричность: $u \times v = -v \times u$.
- Линейность по каждому аргументу:
  $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
  $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
  $u \times (av) = (au) \times v = a(u \times v)$
- $u \times v = 0 \iff u$ и $v$ линейно зависимы
  Доказательство: $\Longleftarrow$: $\langle u \times v, u \times v \rangle = [u, v, u \times v] = 0$, так как $u$ и $v$ линейно зависимы.
  $\Longrightarrow$: если $u$ и $v$ линейно независимы, то существует $w$, дополняющий их до базиса. Тогда $\langle u \times v, w \rangle = [u, v, w] \neq 0$, отсюда $u \times v \neq 0$. $\square$

# Векторное произведение базисных векторов

Пусть $e_1, e_2, e_3$ — правильно ориентированный ортонормированный базис. Тогда

$$e_1 \times e_2 = e_3$$

$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = e_2$$

$$e_2 \times e_1 = -e_3$$

$$e_3 \times e_2 = -e_1$$

$$e_1 \times e_3 = -e_2$$

# Геометрический смысл векторного произведения

**Теорема**

*Пусть $u$ и $v$ линейно независимы. Тогда*

1. *$u \times v$ — вектор, ортогональный $u$ и $v$*
2. *$u, v, u \times v$ — положительный базис*
3. *$|u \times v|$ равно площади параллелограмма, образованного векторами $u$ и $v$.*

**Доказательство.**

1. $\langle u \times v, v \rangle = [u, v, v] = 0.$

2. $[u, v, u \times v] = |u \times v|^2 > 0.$

3. Существует правильный базис $e_1, e_2, e_3$, для которого $u = ae_1$, $v = be_1 + ce_2$, где $a, c > 0$.
Тогда $u \times v = ace_3 \implies |u \times v| = ac.$ □

# Формула для векторного произведения

## Теорема

*Пусть* $e_1, e_2, e_3$ *— положительный ортонормированный базис,* $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. *Тогда*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

*Или, в псевдо-матричной записи,*

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

## Доказательство.

Раскроем скобки в $(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \times (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)$ и подставим произведения базисных векторов. □

# Содержание

# Определение аффинного пространства

## Определение

Аффинное пространство — тройка $(X, \overrightarrow{X}, +)$, где

- $X$ — непустое множество (его элементы — точки)
- $\overrightarrow{X}$ — векторное пространство (присоединённое вект. пр-во)
- $+\colon X \times \overrightarrow{X} \to X$ — операция «откладывания вектора»

и выполняются условия:

- Для любых $x, y \in X$ существует единственный $v \in \overrightarrow{X}$ такой, что $x + v = y$. Обозначения: $v = \overrightarrow{xy} = y - x$.
- $x + (u + v) = (x + u) + v \quad \forall x \in X,\ u, v \in \overrightarrow{X}$.

## Определение

Размерность аффинного пространства $X = (X, \overrightarrow{X}, +)$ — $\dim X = \dim \overrightarrow{X}$.

# Основные примеры

**Пример (векторное пространство)**

Пусть $X$ — векторное пространство.
Положим $\overrightarrow{X} = X$, в качестве «$+$» возьмем сложение в $X$.
Получилось аффинное пространство.

**Пример (аффинное подпространство векторного пространства)**

Пусть $X$ — векторное пространство, $V \subset X$ — линейное подпространство, $x_0 \in X$.
Положим $Y = x_0 + V := \{x_0 + v : v \in V\}$, $\overrightarrow{Y} = V$,
операция «$+$» та же (сужение).
Получилось аффинное пространство $(Y, V, +)$.