Содержание

Определение аффинного пространства

Определение

Аффинное пространство — тройка $(X, \overrightarrow{X}, +)$, где

- X — непустое множество (его элементы — точки)
- $\overrightarrow{X}$ — векторное пространство (присоединённое вект. пр-во)
- $+\colon X \times \overrightarrow{X} \to X$ — операция «откладывания вектора»

и выполняются условия:

- Для любых $x, y \in X$ существует единственный $v \in \overrightarrow{X}$ такой, что $x + v = y$. Обозначения: $v = \overrightarrow{xy} = y - x$.
- $x + (u + v) = (x + u) + v \quad \forall x \in X,\ u, v \in \overrightarrow{X}$.

Определение

Размерность аффинного пространства $X = (X, \overrightarrow{X}, +)$ — $\dim X = \dim \overrightarrow{X}$.

Основные примеры

Пример (векторное пространство)

Пусть X — векторное пространство.
Положим $\overrightarrow{X} = X$, в качестве «$+$» возьмем сложение в X.
Получилось аффинное пространство.

Пример (аффинное подпространство векторного пространства)

Пусть X — векторное пространство, $V \subset X$ — линейное подпространство, $x_0 \in X$.
Положим $Y = x_0 + V := \{x_0 + v : v \in V\}$, $\overrightarrow{Y} = V$,
операция «$+$» та же (сужение).
Получилось аффинное пространство $(Y, V, +)$.

Свойства векторов между точками

Пусть $X = (X, \overrightarrow{X}, +)$ — аффинное пространство

Для каждой пары точек $x, y \in X$ определён вектор $\overrightarrow{xy} \in \overrightarrow{X}$.

Верны равенства $(\forall x, y, z \in X)$:

- $x + \overrightarrow{xy} = y$
  ▷ Это определение $\overrightarrow{xy}$. $\square$
- $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$
  ▷ Пусть $u = \overrightarrow{xy}$, $v = \overrightarrow{yz}$. Тогда
  $x + (u + v) = (x + u) + v = y + v = z \implies u + v = \overrightarrow{xz}$. $\square$
- $\overrightarrow{xx} = 0$
  ▷ Из предыдущего свойства $\overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx}$. $\square$
- $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$
  ▷ $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xx} = 0$. $\square$

Параллельный перенос

Определение

Параллелльный перенос на вектор $v \in \overrightarrow{X}$ — отображение $T_v \colon X \to X$, заданное равенством $T_v(x) = x + v$

Свойства

- $T_{u+v} = T_u \circ T_v$
- $T_0 = \mathrm{id}$
- T_v — биекция
- $T_{-v} = T_v^{-1}$

Таким образом, параллельные переносы образуют группу, которая естественно изоморфна аддитивной группе $\overrightarrow{X}$.

Векторизация (выбор начала отсчёта)

Определение

Выбрать начало отсчёта в точке $o \in X$ — отождествить точки и векторы биекцией $\quad x \longleftrightarrow \overrightarrow{ox} \quad (x \in X)$

Замечание

Обозначение «$+$» для откладывания вектора от точки согласовано со сложением векторов при этом отождествлении: $x + v = y \iff \overrightarrow{ox} + v = \overrightarrow{oy}$

Замечание

Замена начала отсчёта с o на o' прибавляет к векторам, соответствующим точкам, вектор $\overrightarrow{o'o}$:

$$\overrightarrow{o'x} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{ox}$$

Содержание

Арифметика точек

Определение

Линейная комбинация точек $p_1, \dots, p_n \in X$ с коэффициентами $t_1, \dots, t_n$ относительно начала отсчёта $o \in X$ — вектор

$$v = \sum t_i \overrightarrow{op_i}$$

или точка

$$p = o + v$$

Барицентрические и сбалансированные комбинации

Определение

Барицентрическая линейная комбинация — такая, у которой сумма коэффициентов равна 1.
Сбалансированная — такая, у которой сумма коэффициентов равна 0.

Теорема

Барицентрическая комбинация точек — точка, не зависящая от начала отсчёта.
Сбалансированная комбинация точек — вектор, не зависящий от начала отсчёта.

Доказательство теоремы

Вычислим $\sum t_i p_i$ относительно начала отсчёта o:

$$v = \sum t_i \overrightarrow{op_i} \quad \text{(вектор)}, \qquad p = o + v \quad \text{(точка)}$$

И относительно начала отсчёта o', обозначая $w = \overrightarrow{o'o}$:

$$v' = \sum t_i \overrightarrow{o'p_i} = \sum t_i(\overrightarrow{op_i} + w) = v + \left(\sum t_i\right) w$$

Если $\sum t_i = 0$, то $v' = v \implies$ вектор не зависит от начала отсчёта.

Если $\sum t_i = 1$, то $v' = v + w$
$\implies o' + v' = o' + w + v = o + v = p$
$\implies$ точка не зависит от начала отсчёта

Арифметика и геометрия центров масс

Можно придать смысл произвольным линейным комбинациям точек, рассматривая их как материальные точки.

Определение

Материальная точка — пара (m, x), где $x \in X$, $m \in \mathbb{R} \neq \{0\}$ — число, называемое массой материальной точки (может быть отрицательной). Обозначение: mx.

Сумма материальных точек, если $m_1 + m_2 \neq 0$:

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)(\tfrac{m_1}{m_1+m_2}x_1 + \tfrac{m_2}{m_1+m_2}x_2),$$

А если $m_1 + m_2 = 0$, то $m_1x_1 + m_2x_2$ — вектор $m_1(x_1 - x_2)$.

Задача

Определите сумму материальной точки и вектора, а также умножение материальной точки на число, и докажите, что объединение множеств материальных точек и векторов — векторное пространство размерности $\dim X + 1$.

Содержание

Определение

Пусть $X = (X, \overrightarrow{X}, +)$ — аффинное пространство.

Определение

Множество $Y \subset X$ — аффинное подпространство, если существует линейное подпространство $V \subset \overrightarrow{X}$ точка $p \in Y$ такие, что $Y = p + V$.

V называется направлением Y.

Замечание

В векторном пространстве определение совпадает со старым: это образ линейного подпространства V при параллельном переносе на вектор p.
Линейные подпространства — аффинные подпространства, содержащие 0.

Комментарии к определению

Пусть $Y = p + V$ — как в определении. Тогда

- Для любой $q \in Y$ верно, что $q + V = Y$ (определение подпространства и направление не зависят от выбора точки в нём).
- Y — аффинное пространство с $\overrightarrow{Y} = V$

Определение

Аффинные подпространства одинаковой размерности **параллельны**, если их направления совпадают.

- Два подпространства параллельны $\iff$ одно переводится в другое параллельным переносом.
- X разбивается на аффинные подпространства, параллельные данному Y

Прямые и гиперплоскости

Определение

Прямая — аффинное подпространство размерности 1.
Гиперплоскость в X — аффинное подпространство размерности $\dim X - 1$.

Упражнение

Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.

Упражнение

Две различные гиперплоскости не пересекаются $\iff$ они параллельны.

Упражнение

Два аффинных подпространства не пересекаются $\iff$ они лежат в двух параллельных гиперплоскостях.

Упражнение

Множество является аффинным подпространством $\iff$ оно вместе с любыми двумя различными точками содержит проходящую через них прямую.

Предупреждение

Предыдущее упражнение верно для аффинных пространств над $\mathbb{R}$, но не верно над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$.

Содержание

Аффинная оболочка

Теорема

Пересечение любого набора аффинных подпространств — либо пустое множество, либо аффинное подпространство.

Доказательство.

Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку из пересечения. Получим пересечение линейных подпространств. □

Определение

Аффинная оболочка непустого множества $A \subset X$ — пересечение всех аффинных подпространств, содержащих A. Обозначение: $\mathrm{Aff}(A)$.

Из теоремы следует, что $\mathrm{Aff}(A)$ — наименьшее аффинное подпространство, содержащее A.

Тривиальные свойства

Замечание

Если выбрать начало отсчёта в одной из точек множества, то аффинная оболочка превращается в линейную оболочку.

Следствие

$\dim \operatorname{Aff}(A) \leq |A| - 1$

Параметрическое описание аффинной оболочки

Теорема

$\mathrm{Aff}(A)$ — *множество всех барицентрических комбинаций точек из A.*
(То есть комбинаций вида $\sum t_i a_i$, где $a_i \in A$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\sum t_1 = 1$.)

Доказательство.

Выберем начало отсчёта в A. Получится множество всех линейных комбинаций. □

Пример

Прямая, проходящая через точки x и y — множество точек вида $tx + (1-t)y$, где $t \in \mathbb{R}$.

Содержание

Аффинно независимые точки

Определение

Точки $p_1, \dots, p_k$ аффинно зависимы, если существуют $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, не все равные 0, такие, что

$$\sum t_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum t_i p_i = 0$$

(т.е. нетривиальная сбалансированная комбинация, равная нулевому вектору).
Если такой комбинации нет, то точки аффинно независимы.

Переформулировки аффинной независимости

Теорема

Для $p_1, \dots, p_k \in X$ *следующие свойства эквивалентны:*

1. *Они аффинно независимы.*
2. *Векторы* $\overrightarrow{p_1 p_i}$, $i = 2, 3, \dots, k$, *линейно независимы.*
3. $\dim \mathrm{Aff}(p_1, \dots, p_k) = k - 1$.
4. *Каждая точка из* $\mathrm{Aff}(p_1, \dots, p_k)$ *единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации точек* $p_1, \dots, p_k$.

Доказательство

1 $\iff$ 2: Поместим начало отсчёта в p_1. Сбалансированные комбинации $p_1, \ldots, p_n$ превратятся в произвольные комбинации векторов $\overrightarrow{p_1 p_i}$.

2 $\iff$ 3: Поместим начало отсчёта в p_1. Аффинная оболочка превратится в линейную.

1 $\implies$ 4: От противного. Если есть две барицентрические комбинации с одинаковым значением, вычтем их. Получится сбалансированная комбинация, равная нулевому вектору.

4 $\implies$ 1: Аналогично — если есть сбалансированная комбинация, равная нулевому вектору, прибавим ее к любой барицентрической. Получим два представления одной точки.

Аффинный базис

Определение

Аффинный базис (точечный базис) — аффинно независимый набор точек, аффинная оболочка которых — всё пространство.

Пусть $p_0, p_1, \dots, p_n$ — аффинный базис для X. Тогда

- Выберем начало отсчёта в p_0 и рассмотрим векторы $v_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, $i = 1, \dots, n$. Они образуют базис $\overrightarrow{X}$.
  Значит, каждая точка $x \in X$ однозначно записывается в виде $p_0 + \sum_{i=1}^n x_i v_i$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
  Числа $x_1, \dots, x_n$ — аффинные координаты точки x (относительно данного точечного базиса).
- Любая точка x однозначно записывается в виде барицентрической комбинации $\sum_{i=0}^n t_i p_i$. Числа $t_0, \dots, t_n$ (с суммой, равной 1) — барицентрические координаты x.