Содержание

Содержание

Аффинные отображения

Пусть X, Y — аффинные пространства.

Определение

$F\colon X \to Y$ — **аффинное отображение**, если существует такое линейное $L\colon \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$, что для любых $x, y \in X$

$$\overrightarrow{F(x)F(y)} = L(\overrightarrow{xy})$$

L называется **линейной частью** F.

Обозначение: $L = \overrightarrow{F}$.

Другими словами, F аффинное, если оно переводит равные векторы в равные и действует на векторах линейно.

Другая запись определения:

$$F(y) - F(x) = \overrightarrow{F}(y - x)$$

Аффинное отображение задаётся линейной частью и образом одной точки:

Теорема

Пусть $p \in X$, $q \in Y$, $L\colon \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ линейно. Тогда существует единственное аффинное отображение $F\colon X \to Y$ такое, что $\overrightarrow{F} = L$ и $F(p) = q$. Оно имеет вид

$$F(x) = q + L(\overrightarrow{px}) \qquad (*)$$

Доказательство.

Единственность: из равенства $\overrightarrow{F(p)F(x)} = L(\overrightarrow{px})$ следует, что F должно иметь вид $(*)$.

Существование: Определим F формулой $(*)$. Тогда

$$\overrightarrow{F(x)F(y)} = F(y) - F(x) = L(\overrightarrow{py}) - L(\overrightarrow{px}) = L(\overrightarrow{py} - \overrightarrow{px}) = L(\overrightarrow{xy})$$

$\square$

Следствие

Если X, Y — векторные пространства, то аффинные отображения из X в Y — отображения вида

$$F(x) = L(x) + y_0$$

где L — линейная часть, $y_0 \in Y$ — фиксированный вектор. (Композиция L и параллельного переноса на y_0).

Доказательство.

Положим в теореме $p = 0$ и $q = y_0$. □

Замечание

Аффинное $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ записывается матричной формулой

$$F(x) = Ax + b$$

где A — матрица линейного $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Свойства

- Композиция аффинных отображений — аффинное отображение. При этом линейная часть композиции — композиция линейных частей.
  ▷ Пусть F, G — аффинные отображения. Тогда
  $\overrightarrow{F(G(x))F(G(y))} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{G(x)G(y)}) = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{G}(\overrightarrow{xy}))$ □
- Аффинное отображение задаётся образом точечного базиса.
- Аффинное отображение сохраняет барицентрические комбинации:
  $$F\left(\sum t_i x_i\right) = \sum t_i F(x_i)$$
  если $\sum t_i = 1$.
  ▷ Если выбрать начала отсчёта так, что $F(0) = 0$, то F станет линейным. □

Аффинные отображения и подпространства

Пусть $F\colon X \to Y$ — аффинное отображение. Тогда

- Образ $F(A)$ аффинного подпространства $A \subset X$ — аффинное подпространство в Y.
  Образы параллельных подпространств параллельны.

  ▷ Пусть $A = p + \overrightarrow{A}$, тогда $F(A) = F(p) + \overrightarrow{F}(\overrightarrow{A})$.
  Это аффинное подпространство с направлением $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{A})$, которое зависит только от F и направления A. □

- Прообраз $F^{-1}(A)$ аффинного подпространства $A \subset Y$ (в т.ч. точки) — аффинное подпространство или $\emptyset$.
  Непустые прообразы параллельных подпространств (в т.ч. различных точек) параллельны.

  ▷ Выберем $p \in F^{-1}(A)$, тогда $F^{-1}(A) = p + \overrightarrow{F}^{-1}(\overrightarrow{A})$.
  Это аффинное подпространство направления $F^{-1}(\overrightarrow{A})$. □

Ещё одна характеризация аффинных отображений

Упражнение

Пусть X, Y — аффинные пространства, $F\colon X \to Y$ — отображение. Тогда следующие свойства эквивалентны:

1. F аффинное.
2. Для любых $x, y \in X$ и $t \in \mathbb{R}$
$$F(tx + (1-t)y) = tF(x) + (1-t)F(y).$$
3. F сохраняет коллинеарность точек и отношение векторов на одной прямой. То есть: для любых $x, y, z \in X$ таких, что $\overrightarrow{xz} = t \cdot \overrightarrow{xy}$, где $t \in \mathbb{R}$, верно, что $\overrightarrow{F(x)F(z)} = t \cdot \overrightarrow{F(x)F(y)}$.

Замечание

Это верно над $\mathbb{R}$, но неверно, например, над $\mathbb{F}_2$.

Пример: параллельные переносы

Свойство

1. Параллельный перенос — аффинное отображение, его линейная часть тождественна.
2. И обратно, любое аффинное отображение с тождественной линейной частью — параллельный перенос.

Доказательство.

1. По определению.
2. Выберем $p \in X$. Пусть $F\colon X \to X$ — аффинное отображение, $\overrightarrow{F} = \mathrm{id}$, $F(p) = q$.

Эти данные определяют F однозначно, параллельный перенос на $\overrightarrow{pq}$ подходит $\implies$ это он и есть. $\square$

Пример: гомотетии

Определение

Гомотетия с центром $p \in X$ и коэффициентом $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — аффинное отображение $F\colon X \to X$ вида $F(x) = p + k \cdot \overrightarrow{px}$.

Эквивалентно, $F(p) = p$ и $\overrightarrow{F}(v) = kv$ для всех $v \in \overrightarrow{X}$.

Упражнение

Если $F\colon X \to X$ аффинное, $\overrightarrow{F}(v) = kv$ для всех $v \in \overrightarrow{X}$, $k \neq 1$, то F — гомотетия.

Подсказка: достаточно найти неподвижную точку (т.е. решить уравнение $F(x) = x$), она и будет центром гомотетии.

Гомотетии и параллельные переносы

Следствие

Гомотетии и параллельные переносы образуют группу.

Доказательство.

Это такие аффинные отображения, у которых линейная часть — умножение на константу. $\square$

Упражнение

Если композиция двух гомотетий — гомотетия (коэффициенты $\neq 1$), то центры этих трёх гомотетий лежат на одной прямой.

Упражнение

Аффинное отображение F — гомотетия или параллельный перенос $\iff$ $F(\ell) \parallel \ell$ для любой прямой ℓ.

Содержание

Формулировка теоремы

Теорема

Пусть X, Y *— аффинные пространства,* $\dim X \geq 2$.
Пусть $F\colon X \to Y$ *— инъективное отображение,*
и для любой прямой $\ell \subset X$ *ее образ* $F(\ell)$ *— тоже прямая.*

Тогда F *— аффинное отображение.*

Доказательство: предварительные наблюдения

Обозначение: (xy) — прямая, проходящая через точки x и y.
Из условия, $F((xy)) = (F(x)F(y))$.

Выберем начала отсчета так, что $F(0) = 0$.
Докажем, что в этом случае F линейно.

Сначала разберём случай $\dim X = \dim Y = 2$

В этой размерности параллельные прямые — то же, что не пересекающиеся либо совпадающие.

Так как F — биекция и прямые переходят в прямые, отсюда следует, что F сохраняет параллельность прямых:
если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $F(\ell_1) \parallel F(\ell_2)$.

Аддитивность

Докажем, что $F(x+y) = F(x) + F(y)$ для любых $x, y \in X = \overrightarrow{X}$.

При $x = 0$ или $y = 0$ это тривиально. Считаем, что $x, y \neq 0$.

1 случай: x и y линейно независимы. Пусть $z = x + y$.
Тогда z — единственная точка плоскости, для которой $(zx) \parallel (0y)$ и $(zy) \parallel (0x)$. ($0xzy$ — параллелограмм)
Точка $z' := F(x) + F(y)$ обладает тем же свойством по отношению к $F(x)$ и $F(y)$ $\implies$ $z' = F(z)$.

2 случай: x и y пропорциональны. Выберем z, линейно независимый с ними.
$F(x+y+z) = F(x+y) + F(z)$, так как $x+y$ и z линейно независимы или $x+y=0$.
$F(x+y+z) = F(x) + F(y+z) = F(x) + F(y) + F(z)$, так как $x, y+z$ линейно независимы и y, z линейно зависимы.

Однородность над $\mathbb{Q}$

Докажем, что $F(kx) = kF(x)$ для любых $x \in X$ и $k \in \mathbb{Q}$.

1. $k \in \mathbb{N}$. По индукции из аддитивности.
   $F(x + \ldots + x) = F(x) + \ldots + F(x)$
2. $k = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$. Из (1):
   $F(x) = F(n \cdot \frac{1}{n}x) = nF(\frac{1}{n}x) \implies F(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}F(x)$.
3. $k = -1$. $F(-x) + F(x) = F(-x + x) = F(0) = 0$
   $\implies F(-x) = -F(x)$.
4. $k \in \mathbb{Q}$. Из (1), (2), (3).

F сохраняет сонаправленность векторов

Докажем, что если x и y сонаправлены (пропорциональны с положительным коэффициентом), то $F(x)$ и $F(y)$ тоже.

Пусть $\ell = (0x) = (0y)$, $\ell_1 \ni 0$ — другая прямая, $z \in \ell_1 \setminus \{0\}$.
Пусть $y = a^2 x$. Положим $u = ax$ и $v = az$.
Гомотетия с коэффициентом a переводит x в u, z в v, u в y.
Отсюда $(uv) \parallel (xz)$ и $(vy) \parallel (zu)$.

Пусть $\ell' = F(\ell)$, $x' = F(x)$, $y' = F(y)$ и т. д.
$u' \in \ell' \implies u' = bx'$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Рассмотрим v', про нее верно, что $v' \in \ell_1'$ и $(u'v') \parallel (x'z')$.
Такая точка единственна, $v' = bz'$ подходит $\implies v' = bz'$.

Аналогично, $y' \in \ell'$ и $(v'y') \parallel (z'u') \implies y' = bu' = b^2 x'$.

Так как $b^2 > 0$, утверждение доказано.

Однородность над $\mathbb{R}$

Докажем, что $F(ax) = aF(x)$ для любых $x \in X$ и $a \in \mathbb{R}$.
Обозначим $x' = F(x)$.

Из аддитивности и сохранения сонаправленности следует, что F сохраняет порядок точек на прямой.

$\implies$ для любых $b, c \in \mathbb{Q}$ таких, что $a \in (b, c)$, точка $F(ax)$ лежит между $F(bx) = bx'$ и $F(cx) = cx'$.

$\implies$ $F(ax) = ax'$.

Доказательство в двумерном случае закончено.

Старшие размерности

Теперь пусть $\dim X, \dim Y$ — произвольные, ≥ 2.

1. Для любой плоскости $\Pi \subset X$, $F(\Pi)$ — тоже плоскость

Выберем две пересекающиеся прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \Pi$.
Π — объединение всех прямых, пересекающих ℓ_1 и ℓ_2 в разных точках. $F(\Pi)$ так же получается из прямых $F(\ell_1)$ и $f(\ell_2)$
$\implies F(\Pi)$ — плоскость.

2. Окончание доказательства

Линейность отображения — свойство, проверяемое на наборах векторов, лежащих в одной плоскости.
Например, почему $F(x+y) = F(x) + F(y)$:
Точки x, y, $x+y$ и 0 лежат в одной плоскости Π, а для сужения $F|_\Pi \colon \Pi \to F(\Pi)$ равенство уже проверено.
Однородность доказывается аналогично.

Теорема доказана

Теорема над другими полями

Упражнение

Рассмотрим $\mathbb{C}^2$ как аффинное пространство над полем $\mathbb{C}$.
Определим $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ равенством $F(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, где черта обозначает комплексное сопряжение.
Это биекция, переводящая комплексные прямые в комплексные прямые, но не аффинное отображение над $\mathbb{C}$.

Информация

Теорема верна для полей, не допускающих нетривиальных автоморфизмов, кроме $\mathbb{F}_2$.