Содержание

Содержание

Движения

Определение

Евклидово аффинное пространство — аффинное пространство X с заданным на $\overrightarrow{X}$ скалярным произведением.
Расстояние в таком пространстве: $d(x, y) = |x - y|$ ($|\cdot|$ определяется скалярным произведением).

Определение

Движение евклидова аффинного пространства X — биекция из X в X, сохраняющая расстояния.
Группа движений обозначается $\mathrm{Iso}(X)$.

Движения — аффинные преобразования

Теорема

Любое движение — аффинное преобразование, линейная часть которого — ортогональное преобразование, и обратно.

Доказательство.

Пусть $F\colon X \to X$ — движение.

Точки x, y, z лежат на одной прямой $\iff$ одно из неравенств треугольника для них обращается в равенство $\iff$ $F(x), F(y), F(z)$ на одной прямой.

Следовательно, прямые переходят в прямые. По большой теореме отсюда следует, что F аффинно.

$\overrightarrow{F}$ сохраняет норму векторов $\implies$ сохраняет $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (было) $\implies$ это ортогональное преобразование.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Продолжение изометрии с подмножества

Задача

Пусть X — евклидово аффинное пространство, $A \subset X$, $f : A \to X$ сохраняет расстояния.
Тогда существует движение $F : X \to X$ такое, что $F|_A = f$.

Подобия

Определение

Подобие — биекция евклидова аффинного пространства, умножающее все расстояния на константу k (коэффициент подобия).

Теорема

Любое подобие — аффинное преобразование, его линейная часть — композиция ортогонального преобразования и гомотетии.

Доказательство.

Гомотетией с коэффициентом k^{-1} сводится к случаю движения. □

Содержание

Неподвижные точки

Лемма

Пусть X — аффинное пространство, $F\colon X \to X$ — аффинное отображение, и его линейная часть не имеет неподвижных ненулевых векторов, т.е. $\overrightarrow{F}(v) \neq v$ для всех $v \in \overrightarrow{X} \setminus \{0\}$.

Тогда F имеет неподвижную точку, т.е. $\exists x_0 \in X : f(x_0) = x_0$.

Доказательство.

Пусть $L = \overrightarrow{F}$. Выбрав начало отсчёта, запишем F в виде

$$F(x) = L(x) + v.$$

Надо найти решение уравнения $F(x) = x \iff L(x) - x = -v$.

L не имеет неподвижных векторов $\implies \ker(L - E) = \{0\}$
$\implies \operatorname{im}(L - E) = X \implies$ есть решение $L(x) - x = -v$. □

Приложение: повороты плоскости

Следствие

Если линейная часть движения плоскости — поворот на ненулевой угол, то и само движение — поворот на этот угол относительно некоторой точки.

Доказательство.

По лемме есть неподвижная точка. Это и есть центр поворота. □

Следствие

Композиция поворотов — поворот или параллельный перенос.

Строение движения

Теорема

Пусть $F\colon X \to X$ — движение. Пусть $W \subset \overrightarrow{X}$ — подпространство неподвижных векторов отображения $\overrightarrow{F}$. Тогда можно выбрать начало отсчёта в X так, что относительно него F имеет вид

$$F(x) = L(x) + w$$

где $L = \overrightarrow{F}$ — ортогональное преобразование, $w \in W$.

Доказательство.

Рассмотрим $V = W^{\perp}$, это инвариантное подпространство L. В качестве искомого начала отсчёта можно взять неподвижную точку отображения $\mathrm{Pr}_V \circ F$, она существует по лемме. $\square$

Классификация движений плоскости

Следствие (теорема Шаля)

Любое движение плоскости — это одно из:

- *Параллельный перенос*
- *Поворот (относительно некоторой точки)*
- *Скользящая симметрия (композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси).*

Примечания:
тождественное отображение можно отнести и к параллельным переносам, и к поворотам,
осевая симметрия — частный случай скользящей симметрии.

Классификация движений в размерности 3

Упражнение

Любое движение 3-мерного пространсваи — это одно из:

- Винтовое движение или параллельный перенос (композиция поворота относительно прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой)
- Скользящая симметрия, в т.ч. зеркальная симметрия (композиция симметрии относительно плоскости и параллельного переноса на вектор из этой плоскости).
- Зеркальный поворот, в т.ч. центральная симметрия (композиция поворота относительно прямой и симметрии относительно плоскости, ортогональной этой прямой)

Примечание: зеркальную симметрию при желании можно отнести к зеркальным поворотам.

Содержание

Содержание

Напоминание: проективная плоскость

Определение

Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ — факторпространство сферы $\mathbb{S}^2$ по отношению противоположности $x \sim \pm x$.

Определение

Прямая в $\mathbb{RP}^2$ — образ большой окружности сферы при проекции $p\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$.

Основное свойство

Через любые две точки проходит ровно одна прямая,
и любые две прямые пересекаются в одной точке.

Плоскость с бесконечно удалёнными точками

Рассмотрим обычную евклидову плоскость Π.

Назовём бесконечно удалённой точкой класс эквивалентности прямых по отношению параллельности.
Проективная плоскость $\widehat{\Pi}$ — объединение Π и множества всех бесконечно удалённых точек.

Для каждой прямой $\ell \subset \Pi$ определим проективную прямую $\widehat{\ell}$ — объединение ℓ и одной бесконечно удалённой точки, соответствующей направлению ℓ.
Добавим в список проективных прямых бесконечно удалённую прямую, состоящую из всех бесконечно удалённых точек.

Для построенной системы точек и прямых тоже верно, что через любые две точки проходит ровно одна прямая, любые две прямые пересекаются в одной точке.

Соответствие между моделями

Поместим Π в $\mathbb{R}^3$ как плоскость, не проходящую через 0.

Точке $p \in \Pi$ сопоставим пересечение $\mathbb{S}^2 \cap (0p)$. Это пара противоположных точек сферы, т.е. точка из $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\pm$.

Бесконечно удаленной точке $[\ell] \in \widehat{\Pi}$, где ℓ — прямая в Π, сопоставим $\mathbb{S}^2 \cap \ell_0$, где ℓ_0 — прямая, параллельная ℓ в $\mathbb{R}^3$, проходящая через 0.

Получилась биекция между $\widehat{\Pi}$ и $\mathbb{RP}^2$.
Нетрудно видеть, что она переводит прямые в прямые.

Содержание

Определение проективного пространства

Определение

Пусть V — векторное пространство. Проективное пространство, порождённое V (проективизация V) — множество

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim,$$

где $\sim$ — отношение пропорциональности:

$$x \sim y \iff \exists t \in \mathbb{R} : x = ty.$$

Размерность $\mathbb{P}(V)$ по определению равна $\dim V - 1$.

Замечания

1. Можно считать, что $\mathbb{P}(V)$ — множество прямых в V, проходящих через 0.
2. $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ естественно отождествляется с $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^{n+1}/\pm$.
3. Определение работает над любым полем, не только над $\mathbb{R}$.
4. Есть естественная проекция $P\colon V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$.

Однородные координаты

Для точки $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ соответствующая точка $P(x) \in \mathbb{RP}^n$ обозначается

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$$

Числа $x_0, \dots, x_n$ называются однородными координатами точки $P(x)$.

Два набора однородных координат задают одну и ту же точку в $\mathbb{RP}^n$ тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [y_0 : \ldots : y_n] \iff \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall i \quad y_i = c x_i$$

Подпространства

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ — проективное пространство.

Определение

Множество $Y \subset X$ — (проективное) подпространство, если оно имеет вид $\mathbb{P}(W)$, где $W \subset V$ — линейное подпространство.

Пример

Точки — подпространства размерности 0.

Пересечения подпространств

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ — проективное пространство.

Теорема

Пусть $Y, Z \subset X$ *— подпространства,* $\dim Y + \dim Z \geq \dim X$*.*
Тогда $Y \cap Z \neq \emptyset$ *и* $\dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - \dim X$*.*

Пример: $X = \mathbb{RP}^2$, Y и Z — прямые $\implies$ $Y \cap Z \neq \emptyset$.

Доказательство.

Пусть $Y = \mathbb{P}(W)$, $Z = \mathbb{P}(U)$, n, m, k — размерности X, Y, Z.
Тогда $\dim V = n + 1$, $\dim W = m + 1$, $\dim U = k + 1$.
Из условия, $(m+1) + (k+1) \geq n + 2$, откуда

$$\dim(W \cap U) \geq m + k - n + 1 \geq 1$$

Значит, $Y \cap Z \neq \emptyset$ и $\dim(Y \cap Z) \geq m + k - n$. $\square$

Проективное пополнение аффинного пространства

Определение

Пусть A — аффинное пространство. Определим множество **бесконечно удалённых точек**: $A_\infty = \mathbb{P}(\overrightarrow{A})$
и **проективное пополнение** A: $\widehat{A} = A \sqcup A_\infty$.
На $\widehat{A}$ вводится структура проективного пространства:

Вкладываем A в векторное пространство V $(\dim V = \dim A + 1)$ как гиперплоскость, не проходящую через 0. При этом $\overrightarrow{A}$ отождествляется с линейной гиперплоскостью в V.

Теперь строим биекцию $I\colon \widehat{A} \to \mathbb{P}(V)$:
для $x \in A$ положим $I(x) = P(x) = (0x) \in \mathbb{P}(V)$,
а для $x \in A_\infty$ положим $I(x) = x \in A_\infty = \mathbb{P}(\overrightarrow{A}) \subset \mathbb{P}(V)$.

Эта биекция превращает $\widehat{A}$ в проективное пространство, отождествляя его с $\mathbb{P}(V)$.

Свойства

- Построенное отображение — действительно биекция (т.е. определение проективной структуры на $\widehat{A}$ имеет смысл).
- A_∞ — гиперплоскость в $\widehat{A}$. Она называется бесконечно удалённой гиперплоскостью.
- Каждому аффинному подпространству $B \subset A$ соответствует проективное подпространство $\widehat{B} \subset \widehat{A}$.
- Каждое проективное подпространство в $\widehat{A}$ либо соответствует аффинному подпространству в A, либо содежится в бесконечно удалённой гиперплоскости.

Всё это выводится из линейной алгебры (свойств пересечений подпространств).