Содержание

Напоминание: проективные пространства

Определение

Проективное пространство, порождённое векторным пространством V (проективизация V) — множество

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim,$$

где $\sim$ — отношение пропорциональности.

Размерность $\mathbb{P}(V)$ по определению равна $\dim V - 1$.

Определение

Проективное пополнение аффинного пространства A — это $\widehat{A} = A \sqcup A_\infty$, где $A_\infty = \mathbb{P}(\overrightarrow{A})$ — множество бесконечно удалённых точек.

На $\widehat{A}$ вводится проективная структура с помощью вложения A в векторное пространство так, что получается гиперплоскость, не содержащая 0.

Пример: $\mathbb{R}^n$ как проективное пополнение $\mathbb{RP}^n$

Пример

$\mathbb{RP}^n$ — проективное пополнение $\mathbb{R}^n$.
Это видно из стандартного вложения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{RP}^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 : \ldots : x_n : 1]$$

Бесконечно удалённые точки — те, у которых последняя из однородных координат равна 0.

Пример

$\mathbb{RP}^1$ — прямая с одной бесконечно удалённой точкой, которая обозначается символом «∞»: $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Точке с однородными координатами $[x : y]$ соответствует либо число $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$, если $y \neq 0$, либо ∞, если $y = 0$.

Аффинные карты

И обратно, выкинув из проективного пространства любую гиперплоскость, получаем аффинное пространство.

Рассмотрим $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$, где V — векторное пространство, $W \subset V$ — линейная гиперплоскость.

Выберем аффинную гиперплоскость $A \subset V$, параллельную W и не содержащая 0. Тогда:

- $W = \overrightarrow{A}$
- $\mathbb{P}(V) = \widehat{A}$ — проективное пополнение A.
- $\mathbb{P}(W)$ — бесконечно удалённая гиперплоскость для A.

Отождествляя множество $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ с A, получаем на нём аффинную структуру.

Такие множества называются аффинными картами.

Содержание

Содержание

Подготовка к определению

Пусть V и W — векторные пространства. Будем рассматривать их проективизации $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(W)$.

Лемма

Пусть $L\colon V \to W$ — инъективное линейное отображение. Тогда существует единственное отображение $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ такое, что

$$P \circ L = F \circ P,$$

где P — проекции из $W \setminus \{0\}$ и $V \setminus \{0\}$ в $\mathbb{P}(W)$ и $\mathbb{P}(V)$ соответственно.

Доказательство.

L переводит прямые в прямые. Положим $F(\ell) = L(\ell)$ для каждого $\ell \in \mathbb{P}(V)$.
(Напоминание: точка из $\mathbb{P}(V)$ — прямая в V.) $\square$

Определение

Определение

Отображение F из леммы называется **проективизацией** L.
Обозначение: $F = \mathbb{P}(L)$.

Определение

Отображение их $\mathbb{P}(V)$ в $\mathbb{P}(W)$ — **проективное**, если оно является проективизацией некоторого линейного $L\colon V \to W$.

Замечание

Все проективные отображения инъективны.

Упражнение

Линейное отображение, порождающее данное прективное, определено однозначно с точностью до пропорциональности.

Образы подпространств

Свойство

Проективное отображение переводит проективные подпространства (в том числе, всё пространство) в проективные подпространства той же размерности.

Доказательство.

Следует из такого же свойства инъективных линейных отображений. $\square$

Продолжение аффинного отображения

Теорема

Пусть X, Y — аффинные пространства, $\widehat{X}, \widehat{Y}$ — их проективные пополнения, $F\colon X \to Y$ — инъективное аффинное отображение. Тогда

1. *существует единственное проективное отображение $\widehat{F}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$ такое, что $\widehat{F}|_X = F$.*
2. *$\widehat{F}$ переводит бесконечно удалённые точки в бесконечно удалённые.*

Доказательство

Существование. Пусть $\widehat{X} = \mathbb{P}(V)$, $\widehat{Y} = \mathbb{P}(W)$ как в построении проективного пополнения. В частности, $X \subset V$ и $Y \subset W$ — гиперплоскости, не содержащие 0.
Пусть $p_0, \dots, p_n$ — точечный базис в X.
Он является базисом V как векторного пространства.
Определим L на базисе: $L(p_i) = F(p_i) \in Y \subset V$.
Тогда $L|_X = F \implies$ подходит $\widehat{F} = \mathbb{P}(L)$.

Образы бесконечно удалённых точек и единственность.
Пусть $p \in X_\infty$.
Тогда $p \in \widehat{\ell}$ для некоторой аффинной прямой $\ell \subset X$.
$\ell' := F(\ell)$ — аффинная прямая в Y, $\widehat{F}(\widehat{\ell}) = \widehat{\ell'}$
$\implies \widehat{F}(p)$ — единственная бесконечно удалённая точка $\widehat{\ell'}$.

Упражнение

Проективное отображение $\Phi\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$ является продолжением некоторого аффинного $\iff$ $\Phi^{-1}(Y_\infty) = X_\infty$.

Задача

Биекция между проективными пространствами одинаковой размерности ≥ 2 является проективным отображением $\iff$ она переводит прямые в прямые.

Подсказка: это выводится из аффинного случая (выберем любую гиперплоскость и объявим её и её образ бесконечно удалёнными).

Центральная проекция

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ — проективное пространство.

Определение

Пусть $H_1, H_2 \subset X$ — гиперплоскости, $p \in X \setminus (H_1 \cup H_2)$. Центральная проекция с центром p из H_1 в H_2 — отображение $F\colon H_1 \to H_2$, определяемое так:
Пусть $x \in H_1$, тогда $F(x)$ — точка пересечения прямой (px) и гиперплоскости H_2.

Замечание

В определении используются следующие проективные факты:

- Через две различные точки проходит единственная прямая.
- Гиперплоскость и не содержащаяся в ней прямая пересекаются ровно по одной точке.

Они следуют из линейной алгебры и свойств пересечений.

Комментарии

Замечание

Центральная проекция — биекция между H_1 и H_2.
Обратное отображение из H_2 в H_1 — центральная проекция с тем же центром.

Замечание

Центральная проекция — тот пример, из-за которого проективные отображения называют проективными.

Замечание

Фотография плоского участка земной поверхности — образ этого участка при проективном отображении.

Центральная проекция — проективное отображение

Теорема

Центральная проекция — проективное отображение.

Доказательство.

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $H_i = \mathbb{P}(W_i)$, где $W_i \subset V$ — линейная гиперплоскость ($i = 1, 2$), $p = \mathbb{P}(\ell)$, где $\ell \subset V$ — прямая, $\ell \ni 0$.
Тогда $W_2 \cap \ell = \{0\} \implies V = W_2 \oplus \ell$.
Пусть $L \colon V \to W_2$ — проекция вдоль ℓ.
Так как $W_1 \cap \ell = \{0\}$, $L|_{W_1}$ — биекция.
$\mathbb{P}(L|_{W_1})$ — наша центральная проекция. $\square$

Проективные преобразования прямой

Рассмотрим $\mathbb{RP}^1 = \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует $[x:1] \in \mathbb{RP}^1$, точке $[x:y] \in \mathbb{RP}^1$ — число $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$ или ∞.

Проективное преобразование $\mathbb{RP}^1$ имеет вид

$$[x:y] \mapsto [ax+by : cx+dy],$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

Для $\widehat{\mathbb{R}}$ это дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Особые случаи:

- Если $cx + d = 0$, то $f(x) = \infty$.
- Если $x = \infty$, то $f(x) = \frac{a}{c}$.

Содержание

Метод отправки на бесконечность

Рассмотрим проективное пополнение $\widehat{X}$ аффинного пространства X.

Свойство

Проективными преобразованиями можно перевести любую гиперплоскость в бесконечно удалённую.

Доказательство.

Пусть $\widehat{X} = \mathbb{P}(V)$. Линейными преобразованиями V можно перевести любую линейную гиперплоскость в ту, которая соответствует X_∞. $\square$

Отправка на бесконечность правильно выбранной гиперплоскости иногда позволяет упростить задачу.
Мы докажем этим методом теоремы Дезарга и Паппа.

Определения к теореме Дезарга

Определение

Треугольник — тройка точек (вершин), не лежащих на одной прямой. Порядок перечисления вершин фиксирован.
Стороны треугольника — прямые, содержащие пары вершин.

Определение

Пусть $\triangle a_1 b_1 c_1$ и $\triangle a_2 b_2 c_2$ — треугольники на проективной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Они

- перспективны относительно точки p, если прямые $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ и $(c_1 c_2)$ содержат p;
- перспективны относительно прямой ℓ, если точки пересечения $(a_1 b_1) \cap (a_2 b_2)$, $(a_1 c_1) \cap (a_2 c_2)$, $(b_1 c_1) \cap (b_2 c_2)$ принадлежат ℓ.

p и ℓ — центр перспективы и ось перспективы.

Теорема Дезарга

Теорема (Дезарг)

Если два треугольника на проективной плоскости (с различными вершинами и сторонами) перспективны относительно некоторой точки, то они перспективны относительно некоторой прямой.

Замечание

Верно и обратное утверждение.

Упражнение

Выведите из теоремы Дезарга обратную теорему.

Доказательство т. Дезарга — обозначения

Пусть данная плоскость — проективное пополнение $\widehat{\Pi}$ аффинной плоскости Π, p — центр перспективы $\triangle a_1 b_1 c_1$ и $\triangle a_2 b_2 c_2$.

Будем считать, что p не совпадает ни с одной из вершин треугольников, иначе теорема тривиальна.

Легко проверить, что три прямые $(pa_1) = (pa_2)$, $(pb_1) = (pb_2)$, $(pc_1) = (pc_2)$ различны, иначе какие-то стороны совпадают.

Обозначим точки пересечения:

$$(a_1 b_1) \cap (a_2 b_2) = \{z\}$$
$$(a_1 c_1) \cap (a_2 c_2) = \{y\}$$
$$(b_1 c_1) \cap (b_2 c_2) = \{x\}$$

Легко проверить, что все обозначенные точки различны.

Доказательство т. Дезарга — отправка на бесконечность

Применим проективное преобразование, переводящее прямую (yz) в бесконечно удалённую прямую. Обозначим образы всех точек теми же буквами. Условие и утверждение теоремы не изменятся.
Легко проверить, что вершины треугольников не станут бесконечно удалёнными.
Мы свели теорему к следующему утверждению:

Теорема Дезарга, аффинный вариант

Пусть $\triangle a_1 b_1 c_1$ и $\triangle a_2 b_2 c_2$ на аффинной плоскости Π перспективны относительно точки p (возможно, бесконечно удалённой), $(a_1 b_1) \parallel (a_2 b_2)$, $(a_1 c_1) \parallel (a_2 c_2)$.
Тогда $(b_1 c_1) \parallel (b_2 c_2)$.

Доказательство аффиного варианта т. Дезарга

Сначала предположим, что p — не бесконечно удалённая.
Рассмотрим гомотетию F с центром p такую, что $F(a_1) = a_2$.

$a_2 = F(a_1)$, $b_2 \in (pb_1)$, $(a_1 b_1) \parallel (a_2 b_2) \implies F(b_1) = b_2$.

Аналогично $F(c_1) = c_2$.

$F(b_1) = b_2$, $F(c_1) = c_2 \implies (b_1 c_1) \parallel (b_2 c_2)$.

Случай, когда p — бесконечно удалённая точка.
Это означает, что прямые $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ параллельны.
Тогда возьмём в качестве F параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{a_1 a_2}$ и повторим доказательство.
Использовались только такие свойства F:

- образ любой прямой параллелен ей самой;
- прямые $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$ переходят в себя.

Теорема доказана

Теорема Паппа

Теорема (Папп Александрийский)

Пусть a_1, a_2, a_3 — точки на одной прямой, b_1, b_2, b_3 — точки на другой прямой в той же плоскости (все указанные точки различны, плоскость — проективная). Тогда точки пересечения

$$(a_1 b_2) \cap (a_2 b_1)$$
$$(a_1 b_3) \cap (a_3 b_1)$$
$$(a_2 b_3) \cap (a_3 b_2)$$

лежат на одной прямой.

Доказательство т. Паппа — отправка на бесконечность

Пусть α — прямая, содержащая a_1, a_2, a_3,
β — прямая содержащая b_1, b_2, b_3,
p — точка пересечения α и β.
Считаем, что a_i и b_i не совпадают с p, иначе утверждение тривиально.

Применим проективное преобразование, отправляющее точки пересечения $(a_1 b_2) \cap (a_2 b_1)$ и $(a_1 b_3) \cap (a_3 b_1)$ на бесконечность.
Легко проверить, что точки a_i и b_i на бесконечность не попадут.
Мы свели теорему к утверждению про аффинную плоскость:

Теорема Паппа, аффинный вариант

Пусть a_1, a_2, a_3 — точки на одной прямой, b_1, b_2, b_3 — точки на другой прямой, $(a_1 b_2) \parallel (a_2 b_1)$, $(a_1 b_3) \parallel (a_3 b_1)$.
Тогда $(a_2 b_3) \parallel (a_3 b_2)$.

Доказательство аффиного варианта т. Паппа

Теорема Паппа, аффинный вариант

Пусть a_1, a_2, a_3 — точки на одной прямой, b_1, b_2, b_3 — точки на другой прямой, $(a_1 b_2) \parallel (a_2 b_1)$, $(a_1 b_3) \parallel (a_3 b_1)$.
Тогда $(a_2 b_3) \parallel (a_3 b_2)$.

Пусть F_1 и F_2 — гомотетии с центром в p (если $p \in \Pi_\infty$, то параллельные переносы) такие, что

$F_1(a_1) = a_2$, $F(b_2) = b_1$ (пользуемся тем, что $(a_1 b_2) \parallel (a_2 b_1)$),

$F_2(a_3) = a_1$, $F_2(b_1) = b_3$ (пользуемся тем, что $(a_1 b_3) \parallel (a_3 b_1)$).

Они коммутируют: $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1 := F$, так как это две гомотетии с общим центром или два параллельных переноса.

$$F(a_3) = F_1(F_2(a_3)) = a_2, \quad F(b_2) = F_2(F_1(b_2)) = b_3$$

$$\implies (a_2 b_3) \parallel (a_3 b_2).$$

□