

## Вопросы к экзамену по геометрии и топологии, 2 семестр, 2020

**Примечание:** часть вопросов съел коронавирус, но их тоже надо знать.

1. Евклидовы пространства. Неравенство КБШ и неравенство треугольника.
2. Углы. Неравенство треугольника для углов, периметр сферического треугольника.
3. Ортогональность, ортонормированные наборы векторов, их линейная независимость.
4. Ортогонализация по Граму–Шмидту, существование ортонормированных базисов.
5. Изоморфизм евклидовых пространств. Изоморфность пространств одинаковой размерности.
6. Ортогональное дополнение, ортогональная проекция.
7. Лемма Рисса, гиперплоскости и их нормали, расстояние до гиперплоскости.
8. Изометрические отображения и их матрицы.
9. Общий вид ортогонального преобразования (разложение на инвариантные подпространства).
10. Ориентация векторного пространства. Смешанное произведение.
11. Векторное произведение в  $\mathbb{R}^3$ .
12. Аффинные пространства. Бариецентрические и сбалансированные комбинации точек.
13. Аффинные подпространства, аффинные оболочки.
14. Аффинно независимые наборы точек.
15. Аффинные отображения, линейная часть, композиция. Параллельные переносы и гомотетии.
16. Основная теорема аффинной геометрии.
17. Движения и подобия, их аффинность.
18. Неподвижные точки аффинных отображений. Движения плоскости (теорема Шаля).
19. Проективные пространства. Подпространства и пересечения. Однородные координаты.
20. Проективное пополнение аффинного пространства, аффинные карты, связь  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{RP}^n$ .
21. Проективные отображения: определение, продолжение аффинных.
22. Центральная проекция: определение, почему это проективное отображение.
23. Теорема Дезарга.
24. Теорема Паппа.
25. Проективные базисы, действие проективных преобразований на них.
26. Билинейные и квадратичные формы. Их матрицы.
27. Диагонализация квадратичной формы в ортонормированном базисе.
28. Приведение уравнения квадрики к простейшему виду.
29. Виды квадрик на плоскости. Квадрики одного вида аффинно эквивалентны.
30. Выпуклые множества. Шары, полупространства, сумма выпуклых множеств.
31. Выпуклые оболочки и выпуклые комбинации точек.
32. Теорема Каратеодори, следствие о выпуклой оболочке компакта.
33. Теоремы Радона и Хелли.
34. Теорема Хелли для бесконечного набора компактов. Теорема Юнга.
35. Выпуклый компакт с непустой внутренностью гомеоморфен шару.
36. Относительная внутренность, ее непустота. Топологическая классификация выпуклых компактов.
37. Замыкание и внутренность выпуклого множества.
38. Как лучи пересекают границу выпуклого множества. Внутренность замыкания и т.п.
39. Отделимость компактного выпуклого множества от замкнутого. Пересечения полупространств.
40. Опорные гиперплоскости, их существование.
41. Теорема о нестрогой отделимости.
42. Экстремальные точки. Конечномерная теорема Крейна-Мильмана.
43. Первая часть теоремы Вейля-Минковского (если пересечение, то выпуклая оболочка).
44. Поляра, свойства поляр.
45. Теорема о биполяре.
46. Вторая часть теоремы Вейля-Минковского (если выпуклая оболочка, то пересечение).
47. Гомотопии и гомотопные отображения. Гомотопии и композиция.
48. Гомотопии путей и произведения путей. Определение фундаментальной группы.
49. Перенос фундаментальной группы вдоль пути, независимость от точки.
50. Фундаментальная группа произведения.
51. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением.
52. Односвязные пространства. Примеры. Односвязность сфер.
53. Стягиваемые петли и односвязность (эквивалентные свойства).
54. Накрытия: определение, примеры, постоянство числа листов.
55. Теорема о поднятии пути. Лемма о непрерывном аргументе.
56. Теорема о поднятии гомотопии.
57. Следствия теоремы о поднятии гомотопии. Преобраз точки при универсальном накрытии.
58. Фундаментальные группы  $\mathbb{RP}^n$ , окружности, проколотой плоскости.
59. Негомеоморфность плоскости и  $\mathbb{R}^n$  при  $n > 2$ , инвариантность края в размерности 2.

60. Теоремы Борсука и Брауэра.
61. Основная теорема алгебры.
62. Индекс петли постоянен на компонентах дополнения.
63. Теорема Улама-Борсука.
64. Гомотопическая эквивалентность. Деформационные ретракты. Стягиваемые пространства.
65. Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.
66. Фундаментальная группа букета окружностей.
67. Стягивание поддерева. Фундаментальная группа графа.
68. Изменение фундаментальной группы при приклеивании двумерной клетки.
69. Приклеивание клеток старшей размерности. Фундаментальная группа клеточного пространства.
70. Фундаментальные группы поверхностей.