Содержание

Содержание

Пусть X, Y — топологические пространства.

Определение (накрытие)

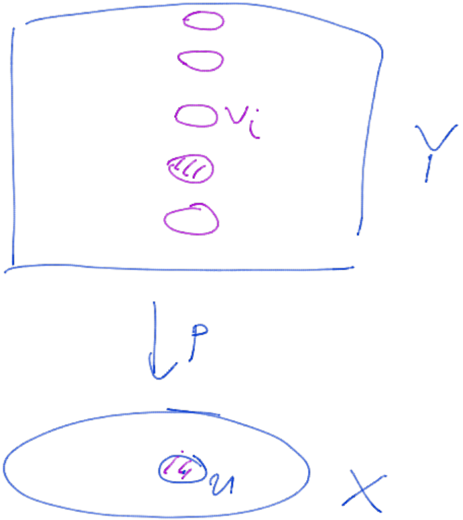
Накрытие — непрерывное отображение $p\colon Y \to X$ такое, что у каждой точки $x \in X$ есть правильно накрываемая окрестность, то есть окрестность $U \ni x$ такая, что:

$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ (дизъюнктное объединение V_i), где $V_i \subset Y$ — открытые множества такие, что для каждого i сужение $p|_{V_i}$ — гомеоморфизм между V_i и U.

Термины:
X — база накрытия;
Y — накрывающее пространство;

Внимание

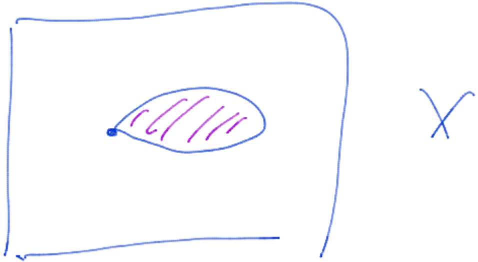
Буквы X и Y поменялись ролями по сравнению с прошлым семестром.



Напоминание: универсальное накрытие

Определение (односвязное пространство)

Топологическое пространство односвязно, если оно линейно связно и все петли в нём стягиваемы.



Определение (односвязное пространство)

Топологическое пространство **односвязно**, если оно линейно связно и все петли в нём стягиваемы.

Определение (универсальное накрытие)

Накрытие — **универсальное**, если накрывающее пространство односвязно.

Замечание

В некоторых источниках (например, в русскоязычной Википедии) определение другое.
Разные определения не эквивалентны, они отличаются в некоторых патологических случаях.

Пример: $p: \mathbb{R} \to S^1$

$p(x) = (\cos x, \sin x)$

Универсальное накрытие есть не всегда

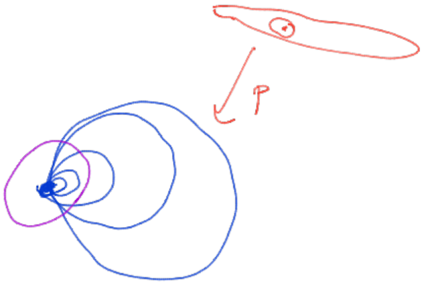
Наша цель — построить универсальное накрывающее пространство для данного X и (позже) доказать его единственность.

Наша цель — построить универсальное накрывающее пространство для данного X и (позже) доказать его единственность.

Для некоторых патологических пространств универсального накрытия нет.

Пример (Гавайская серьга)

Рассмотрим на плоскости счетный набор окружностей, касающихся друг друга в одной точке и с радиусами, стремящимися к 0. Пусть X — объединение этих окружностей.
Тогда X не имеет универсального накрывающего.

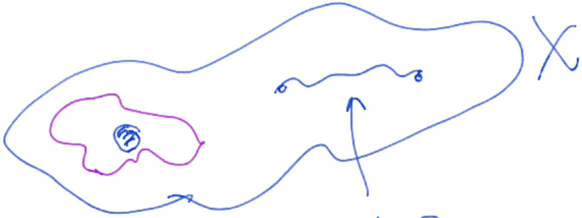


Напоминание: локальная линейная связность

Пусть X — топологическое пространство.

Определение (локальная линейная связность)

X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni X$ существует линейно связная подокрестность V ($x \in V \subset U$).



путь.

$\alpha : [0,1] \to X$

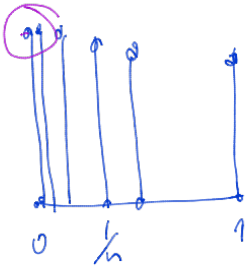
непр.

Напоминание

Напоминание: в локально линейно связном пространстве компоненты связности открыты и совпадают с компонентами связности.

Пример

Пример пространства, которое линейно связно, но не локально линейно связно: гребёнка.

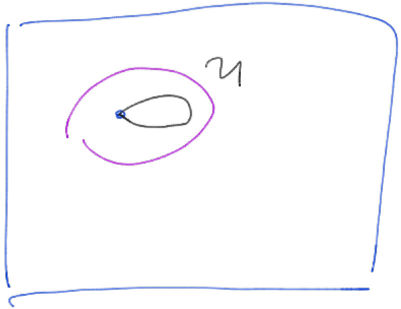


Определение (полулокальная односвязность)

Пространство X **полулокально односвязно** (или **микроодносвязно**), если для любой точки $x \in X$ и ~~любой окрестности $U \ni x$~~ существует ~~по~~докрестность V ($x \in V \cancel{\subseteq U}$) такая, что все петли в V стягиваемы в X.

Комментарий к определению

Подокрестность V не обязательно односвязна.



Определение (полулокальная односвязность)

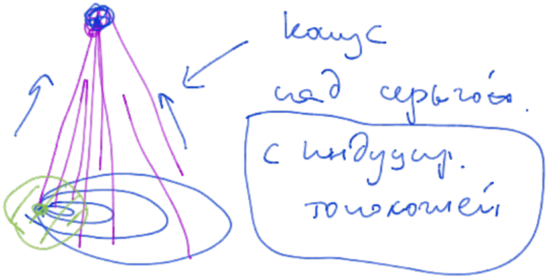
Пространство X **полулокально односвязно** (или **микроодносвязно**), если для любой точки $x \in X$ и ~~любой окрестности $U \ni x$~~ существует ~~под~~окрестность V $(x \in V \cancel{\subset U})$ такая, что все петли в V стягиваемы в X.

Комментарий к определению

Подокрестность V не обязательно односвязна.

Примеры

- Гавайская серьга не полулокально односвязна. ←
- Конус над ней — стягиваемое пространство (гомотопически эквивалентное точке). Следовательно, он полулокально односвязен. Но он не локально односвязен.



Опр X лок. односвязно $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ В $\forall$ окр-ти $\forall$ точки $\exists$ односвязная подокрестность

«Хорошие» пространства

Упражнение

Все многообразия и клеточные пространства локально стягиваемы: в любой окрестности любой точки есть стягиваемая подокрестность.

Как следствие, они локально линейно связны, локально односвязны, полулокально односвязны и т.д.

Формулировка теоремы

Теорема

Пусть X – топологическое пространство, которое

- ✓ *линейно связно;*
- ✓ *локально линейно связно;*
- ✓ *полулокально односвязно.*

Тогда существует универсальное накрытие с базой X.

Мы считаем, что все пр-ва удовл. этим св-вам

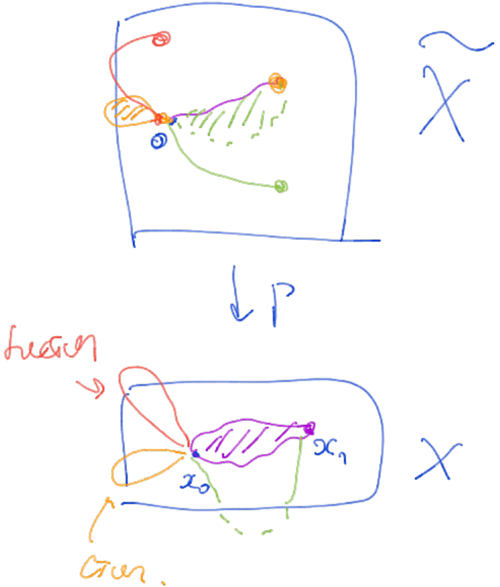
План доказательства

Наша цель — построить односвязное пространство $\widetilde{X}$ и накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$.

План:

1. Определим множество $\widetilde{X}$ и отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$
2. Построим топологию на $\widetilde{X}$
3. Докажем, что p — накрытие
4. Докажем, что $\widetilde{X}$ односвязно

Содержание



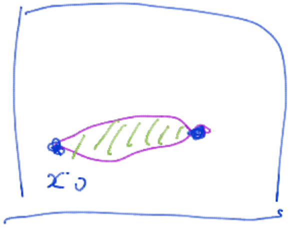
Зафиксируем $x_0 \in X$. Определим множество $\widetilde{X}$ так:

Пусть PX — множество всех путей $\alpha\colon [0,1] \to X$ с началом в x_0, $\sim$ — отношение гомотопности путей (с фиксированными концами).

Положим

$$\widetilde{X} = PX/\sim,$$

Т.е. точка из $\widetilde{X}$ — класс гомотопных путей с началом x_0. Класс пути $\alpha \in PX$ обозначаем через $[\alpha]$.



Множество $\widetilde{X}$ и отображение p

Зафиксируем $x_0 \in X$. Определим множество $\widetilde{X}$ так:

Пусть PX — множество всех путей $\alpha\colon [0,1] \to X$ с началом в x_0, $\sim$ — отношение гомотопности путей (с фиксированными концами).

Положим

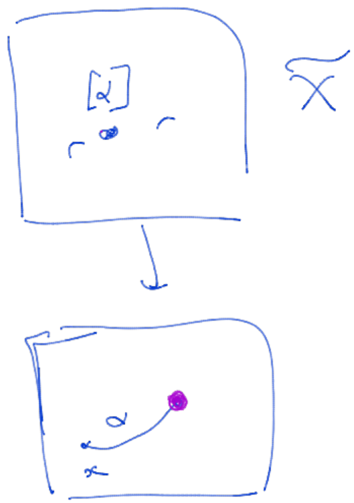
$$\widetilde{X} = PX/\sim,$$

Т.е. точка из $\widetilde{X}$ — класс гомотопных путей с началом x_0. Класс пути $\alpha \in PX$ обозначаем через $[\alpha]$.

Определим $p\colon \widetilde{X} \to X$ равенством

$$p([\alpha]) = \alpha(1), \qquad \alpha \in PX.$$

Корректность очевидна.

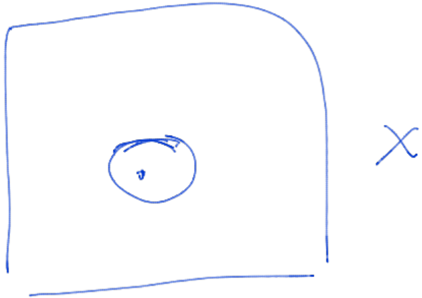


«Хорошие» окрестности

Будем называть множество $U \subset X$ хорошим, если оно открыто, линейно связно и любая петля в U стягиваема в X (как в определении полулокальной односвязности).

Факт

Хорошие множества образуют базу топологии X.



«Хорошие» окрестности

Будем называть множество $U \subset X$ хорошим, если оно открыто, линейно связно и любая петля в U стягиваема в X (как в определении полулокальной односвязности).

Факт

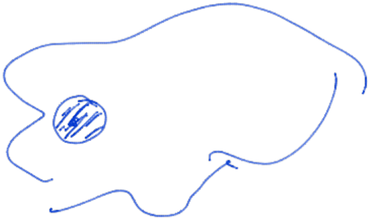
Хорошие множества образуют базу топологии X.

Доказательство.

Свойство эквивалентно тому, что в любой окрестности любой точки есть хорошая подокрестность.
Это следует из полулокальной односвязности и локальной линейной связности. □

База: $\Sigma \subset \{$открытые мн-ва$\}$

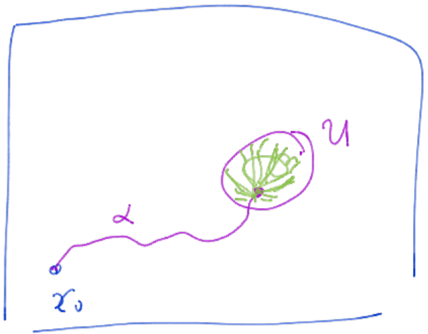
т.к. $\forall$ открытое — объединение мн-в из Σ



Топология на $\widetilde{X}$

Пусть $U \subset X$ — хорошая окрестность, $\alpha \in PX$ — путь с $\alpha(1) \in U$. Определим множество $U^\alpha \subset \widetilde{X}$ как множество всех классов вида $[\alpha s]$, где s — путь в U с началом $\alpha(1)$.

Введём на $\widetilde{X}$ топологию, порождённую всевозможными множествами U^α такого вида (пока как предбазой). Будем называть множества вида U^α специальными.



Топология на $\widetilde{X}$

Пусть $U \subset X$ — хорошая окрестность, $\alpha \in PX$ — путь с $\alpha(1) \in U$. Определим множество $U^\alpha \subset \widetilde{X}$ как множество всех классов вида $[\alpha s]$, где s — путь в U с началом $\alpha(1)$.

Введём на $\widetilde{X}$ топологию, порождённую всевозможными множествами U^α такого вида (пока как предбазой). Будем называть множества вида U^α специальными.

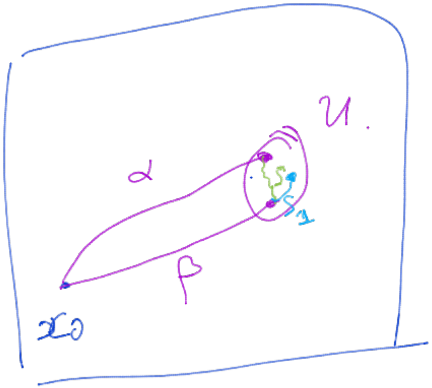
Факт

Если $[\beta] \in U^\alpha$, то $U^\beta = U^\alpha$.

Доказательство.

$[\beta] \in U^\alpha \implies \beta \sim \alpha s$ для некоторого пути $s \subset U$.
$\implies \beta s_1 \sim \alpha(s s_1)$ для любого $s_1 \subset U$ с $s_1(0) = \beta(1)$
$\implies U^\beta \subset U^\alpha$.

Обратно аналогично, так как $\alpha \sim \beta s^{-1}$. □



База топологии $\widetilde{X}$

Факт

Специальные множества образуют базу топологии $\widetilde{X}$.

Доказательство.

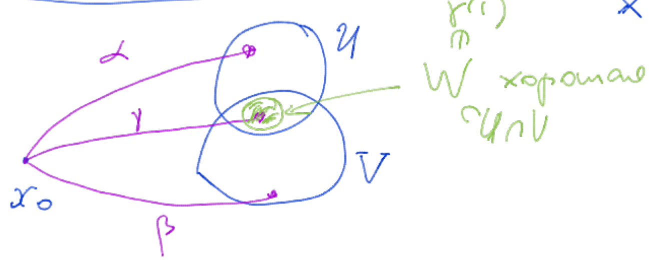
Достаточно проверить, что пересечения вида $U^\alpha \cap V^\beta$ являются объединениями специальных множеств.
Достаточно для любого $[\gamma] \in U^\alpha \cap V^\beta$ найти окрестность вида W^γ, которая содержится в $U^\alpha \cap V^\beta$.

В качестве W подходит хорошая окрестность точки $\gamma(1)$, содержащуюся в $U \cap V$.
Действительно, $W^\gamma \subset U^\gamma = U^\alpha$, аналогично $W^\gamma \subset V^\beta$
$\implies W \subset U^\alpha \cap V^\beta$. □

Σ' – наша предбаза.

$\Sigma' \subset 2^{\widetilde{X}}$

Σ' – база $\iff \forall\ A, B \subset \Sigma'$
$A \cap B$ – объединение мн-в из Σ'.
$\iff \forall x \in A \cap B\ \exists\ V \in \Sigma'$:
$x \in V \subset A \cap B$



Содержание

Непрерывность и открытость

Факт

Пусть $U \subset X$ — хорошее множество. Тогда

1. $p(U^\alpha) = U$ *для любого* $\alpha \in PX$ *с* $\alpha(1) \in U$.
2. $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha U^\alpha$ *где объединение берется по всем таким* α.

Доказательство.

Из линейной связности U. □

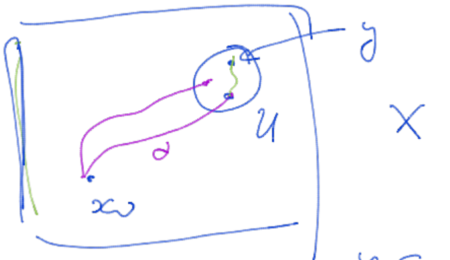
1) $p(U^\alpha) = U$. $\subset$ - очев. ($\forall s$ конец αs - в U).

$\supset$ - из лин. св. U.

2) $\supset$: - из ①

$\subset$: $\forall\ [\beta]$ т.ч. $\beta(1) \in U$.

$\exists\ \alpha$: $[\beta] \in U^\alpha$ Д·ф : $\alpha = \beta$



$y \in p(U^\alpha)$

$\begin{cases} [\alpha s] \in U^\alpha \\ p([\alpha s]) = y \end{cases}$

Факт

Пусть $U \subset X$ — хорошее множество. Тогда

1. $p(U^\alpha) = U$ *для любого* $\alpha \in PX$ *с* $\alpha(1) \in U$.
2. $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha U^\alpha$ *где объединение берется по всем таким* α.

Доказательство.

Из линейной связности U. □

Следствие

p непрерывно и открыто (т.е. образ любого открытого множества открыт).

Доказательство.

Достаточно проверить открытость образов и прообразов базовых множеств. □

Правильно накрываемые окрестности

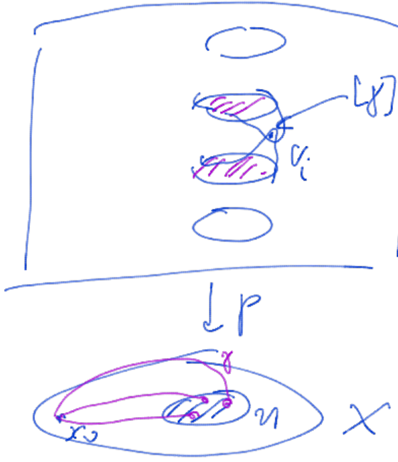
Пусть $U \subset X$ — хорошее множество. Докажем, что U — правильно накрываемая окрестность.

Факт

Для любых $\alpha, \beta \in PX$ с $\alpha(1) \in U$ и $\beta(1) \in U$, множества U^α и U^β либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство.

Если существует $[\gamma] \in U^\alpha \cap U^\beta$, то по одному из предыдущих свойств $U^\alpha = U^\gamma = U^\beta$. $\square$



Правильно накрываемые окрестности

Пусть $U \subset X$ — хорошее множество. Докажем, что U — правильно накрываемая окрестность.

Факт

Для любых $\alpha, \beta \in PX$ с $\alpha(1) \in U$ и $\beta(1) \in U$, множества U^α и U^β либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство.

Если существует $[\gamma] \in U^\alpha \cap U^\beta$, то по одному из предыдущих свойств $U^\alpha = U^\gamma = U^\beta$. □

Следствие

$p^{-1}(U)$ — дизъюнктное объединение открытых множеств вида U^α.

Правильно накрываемые окрестности – 2

Факт

$p|_{U^\alpha}$ — биекция между U^α и U.

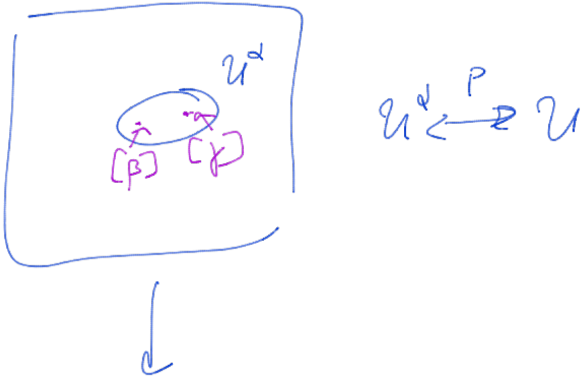
Доказательство.

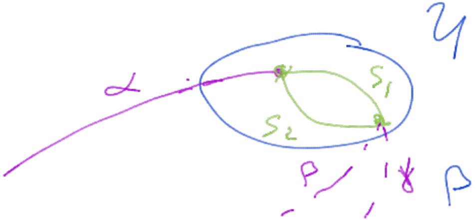
Сюръективность была, осталось доказать инъективность.

Пусть $[\beta], [\gamma] \in U^\alpha$ и $p([\beta]) = p([\gamma])$.

Тогда $\beta(1) = \gamma(1)$ и $\beta \sim \alpha s_1$, $\gamma \sim \alpha s_2$ для некоторых путей $s_1, s_2 \subset U$.

$\implies s_1 s_2^{-1}$ — петля, лежащая в $U \implies$ она стягиваема $\implies s_1 \sim s_2 \implies \beta \sim \gamma \implies [\beta] = [\gamma]$. □





$\beta \sim \alpha s_1 \sim \alpha s_2 \sim \gamma \Longleftarrow$ $s_1 s_2^{-1} \sim const \Rightarrow$ $s_1 \sim const \cdot s_2 \sim s_2$

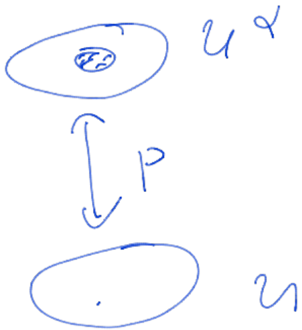
Правильно накрываемые окрестности – 2

Факт

$p|_{U^\alpha}$ *— биекция между* U^α *и* U*.*

Доказательство.

Сюръективность была, осталось доказать инъективность.
Пусть $[\beta], [\gamma] \in U^\alpha$ и $p([\beta]) = p([\gamma])$.
Тогда $\beta(1) = \gamma(1)$ и $\beta \sim \alpha s_1$, $\gamma \sim \alpha s_2$ для некоторых путей $s_1, s_2 \subset U$.
$\implies s_1 s_2^{-1}$ — петля, лежащая в U $\implies$ она стягиваема
$\implies s_1 \sim s_2 \implies \beta \sim \gamma \implies [\beta] = [\gamma]$. $\square$



Отсюда и из непрерывности и открытости:

Следствие

$p|_{U^\alpha}$ *— гомеоморфизм между* U^α *и* U*.*

Мы доказали, что p — накрытие $\square$

Содержание

Поднятие путей и линейная связность

Обозначим $o = [const_{x_0}] \in \widetilde{X}$.
Для пути $\alpha \in PX$ и $t \in [0,1]$ определим путь $\alpha_t \in PX$:

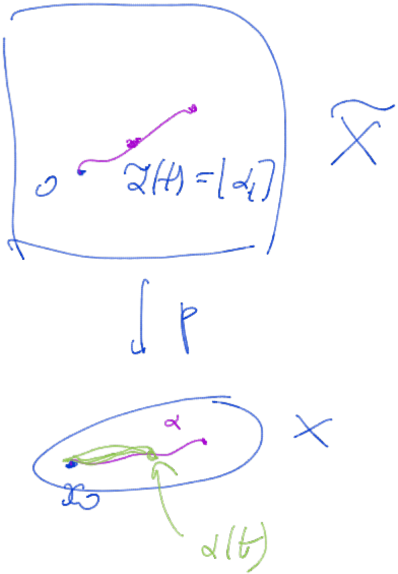
$$\alpha_t(x) = \alpha(tx), \qquad x \in [0,1].$$

Получается отображение $\widetilde{\alpha}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$:

$$\widetilde{\alpha}(t) = [\alpha_t]$$

Факт

$\widetilde{\alpha}$ — поднятие пути α в $\widetilde{X}$ (с началом o и концом $[\alpha]$).



Обозначим $o = [const_{x_0}] \in \widetilde{X}$.
Для пути $\alpha \in PX$ и $t \in [0,1]$ определим путь $\alpha_t \in PX$:

$$\alpha_t(x) = \alpha(tx), \qquad x \in [0,1].$$

Получается отображение $\widetilde{\alpha}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$:

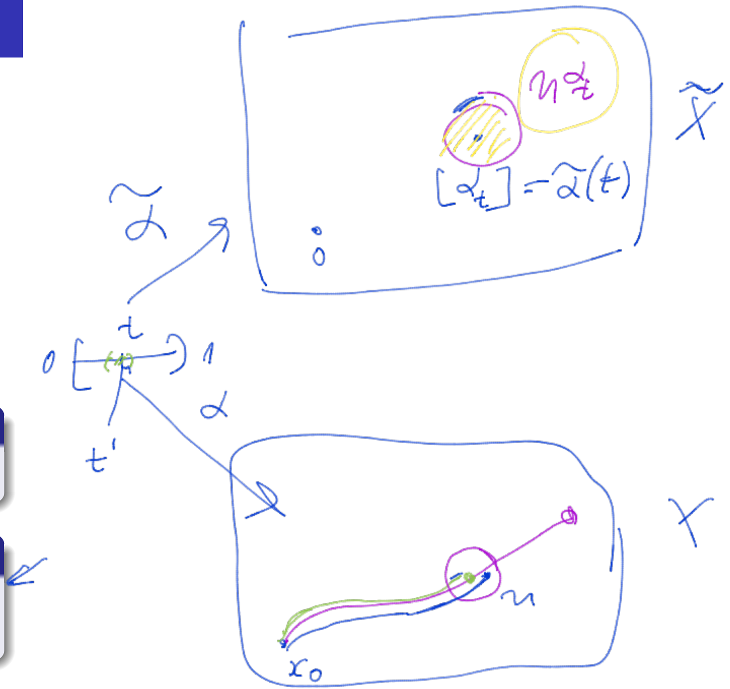
$$\widetilde{\alpha}(t) = [\alpha_t]$$

Факт

$\widetilde{\alpha}$ — поднятие пути α в $\widetilde{X}$ (с началом o и концом $[\alpha]$).

Доказательство.

Тривиально всё, кроме непрерывности $\widetilde{\alpha}$.
Непрерывность проверяется по определению. $\square$



Поднятие путей и линейная связность

Обозначим $o = [const_{x_0}] \in \widetilde{X}$.
Для пути $\alpha \in PX$ и $t \in [0,1]$ определим путь $\alpha_t \in PX$:

$$\alpha_t(x) = \alpha(tx), \qquad x \in [0,1].$$

Получается отображение $\widetilde{\alpha}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$:

$$\widetilde{\alpha}(t) = [\alpha_t]$$

Факт

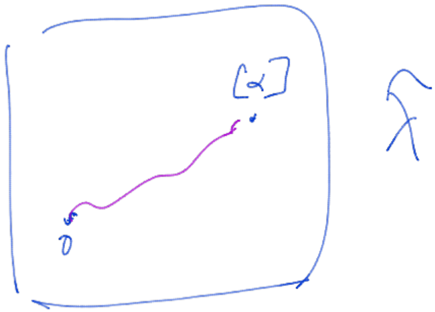
$\widetilde{\alpha}$ — поднятие пути α в $\widetilde{X}$ (с началом o и концом $[\alpha]$).

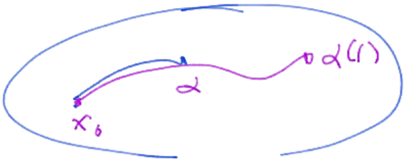
Доказательство.

Тривиально всё, кроме непрерывности $\widetilde{\alpha}$.
Непрерывность проверяется по определению. ☐

Следствие

$\widetilde{X}$ линейно связно.





$\widetilde{\alpha}(1) = [\alpha_1] = [\alpha]$

Стягиваемость петель

Обозначение: $\Omega(X, x_0)$ — множество петель в X с концами в x_0

Факт

Любая петля из $\Omega(\widetilde{X}, o)$ стягиваема.

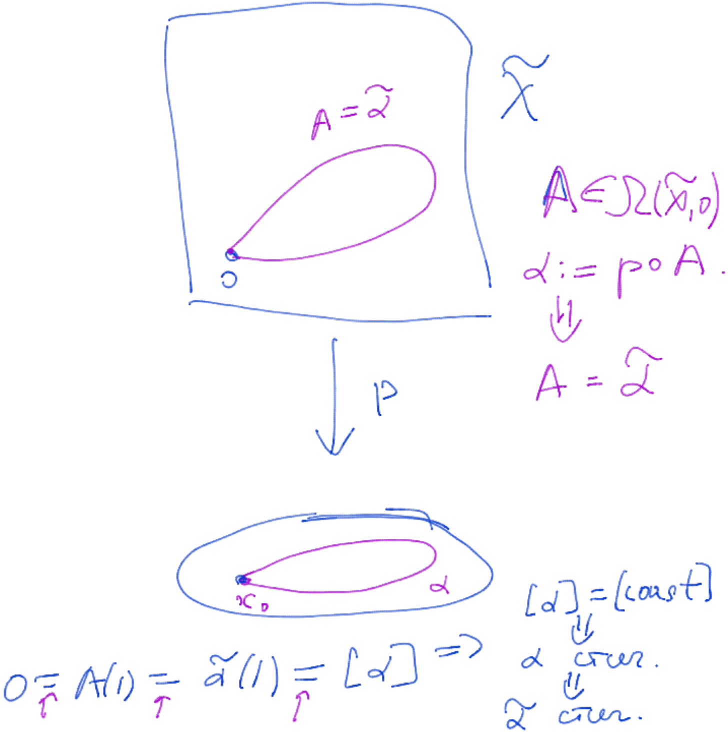
$\widetilde{X}$

Доказательство.

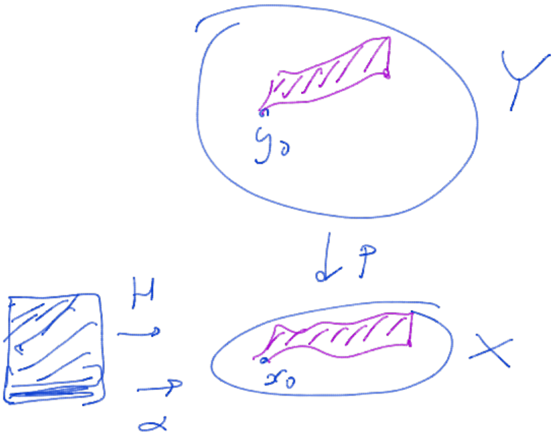
Рассмотрим петлю из $\Omega(\tilde{,}o)$. Она является поднятием некоторой петли $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ — своей композиции с p. Поэтому её можно обозначить $\widetilde{\alpha}$ и использовать предыдущие факты.

Имеем $\widetilde{\alpha}(1) = o \implies [\alpha] = [const] \implies \alpha$ стягиваема $\implies \widetilde{\alpha}$ стягиваема (по теореме о поднятии гомотопии!) □

Итак, p — универсальное накрытие. Теорема доказана!



Содержание



Пространства с отмеченными точками

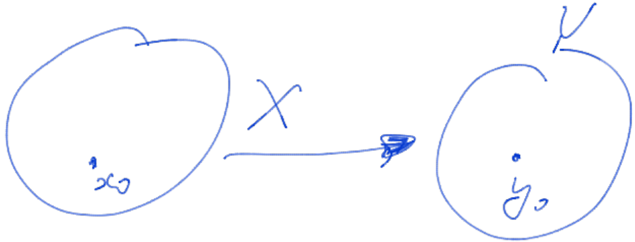
Определение

Пространство с отмеченной точкой — пара (X, x_0), где X — топологическое пространство и $x_0 \in X$.

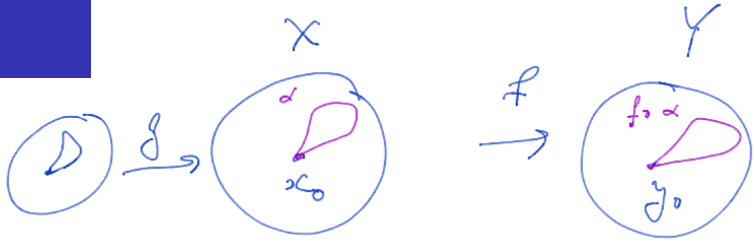
Отображение пространств с отмеченными точками

$$\boxed{f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)}$$

— непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $f(x_0) = y_0$.



Напоминание: индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп



Отображение $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

определяемый равенством

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha], \qquad \alpha \in \Omega(X, x_0).$$

Выполняются равенства

$$id_* = id$$

и

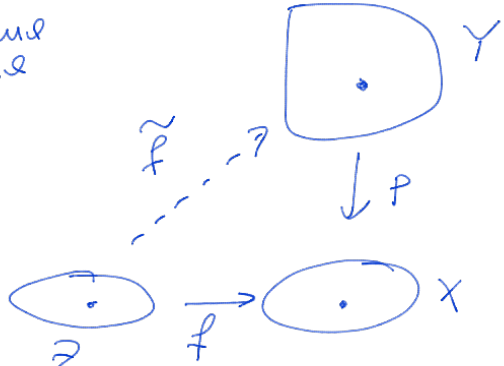
$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Содержание

Формулировка

определение поднятия

Пусть $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ — накрытие.
Поднятие отображения $f\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ в данное накрытие — это такое $\widetilde{f}\colon (Z, z_0) \to (Y, y_0)$, что $p \circ \widetilde{f} = f$.



Теорема

Пусть Z линейно связно и локально линейно связно.

Поднятие отображения $f\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ в накрытие $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ существует тогда и только тогда, когда

$$Im(f_*) \subset Im(p_*),$$

группа накрытия.

где f_* и p_* — индуцированные гомоморфизмы фундаментальных групп.

При этом поднятие единственно.

Im = image

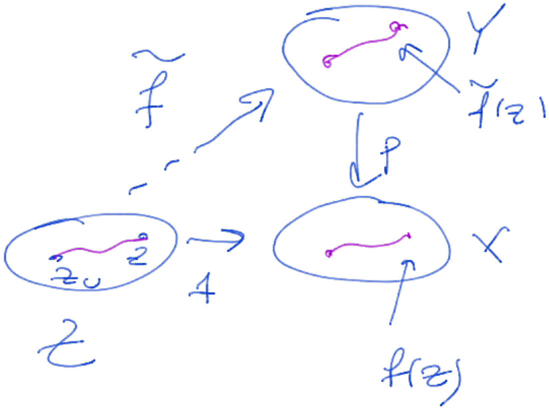
$$\boxed{Im(f_*) = f_*(\pi_1(Z, z_0))}$$

Замечание

$Im(p_*)$ — группа накрытия. Она состоит из петель, которые не размыкаются при поднятии.

Доказательство – 1

Единственность: Пусть $\widetilde{f}$ — искомое поднятие.
Рассмотрим $z \in Z$, соединим z_0 с z путём α.
Путь $\widetilde{f} \circ \alpha$ — поднятие $f \circ \alpha$ с началом y_0 и концом $\widetilde{f}(z)$.
По теореме о поднятии пути, поднятие $f \circ \alpha$ с началом y_0 единственно. Это определяет $\widetilde{f}(z)$ однозначно.



Доказательство – 1

Единственность: Пусть $\widetilde{f}$ — искомое поднятие.
Рассмотрим $z \in Z$, соединим z_0 с z путём α.
Путь $\widetilde{f} \circ \alpha$ — поднятие $f \circ \alpha$ с началом y_0 и концом $\widetilde{f}(z)$.
По теореме о поднятии пути, поднятие $f \circ \alpha$ с началом y_0 единственно. Это определяет $\widetilde{f}(z)$ однозначно.

$\Longrightarrow$: Если $f = p \circ \widetilde{f}$, то $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$, откуда $Im(f_*) \subset Im(p_*)$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

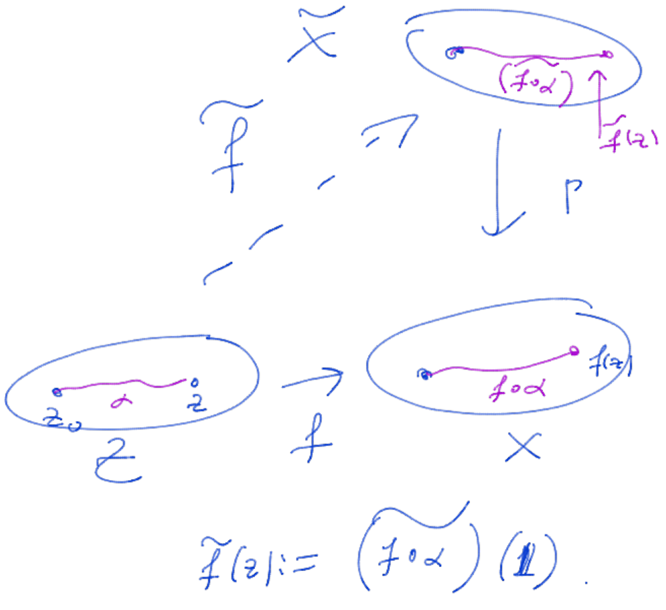
$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Z) \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

Единственность: Пусть $\widetilde{f}$ — искомое поднятие.
Рассмотрим $z \in Z$, соединим z_0 с z путём α.
Путь $\widetilde{f} \circ \alpha$ — поднятие $f \circ \alpha$ с началом y_0 и концом $\widetilde{f}(z)$.
По теореме о поднятии пути, поднятие $f \circ \alpha$ с началом y_0 единственно. Это определяет $\widetilde{f}(z)$ однозначно.

$\Longrightarrow$: Если $f = p \circ \widetilde{f}$, то $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$, откуда $Im(f_*) \subset Im(p_*)$.

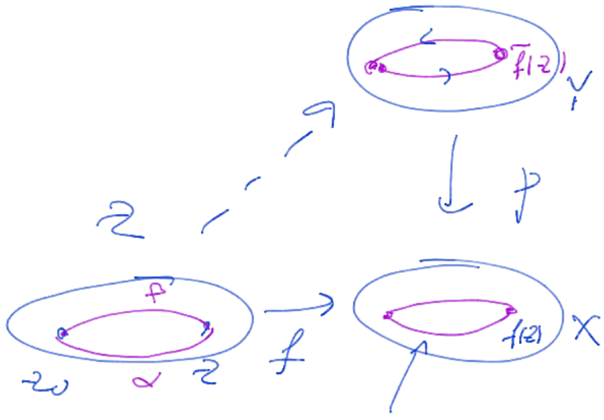
$\Longleftarrow$: Пусть $Im(f_*) \subset Im(p_*)$
Построим $\widetilde{f} \colon Z \to Y$ как в доказательстве единственности: для $z \in Z$ выберем путь $\alpha \colon [0,1] \to Z$ с $\alpha(0) = z_0$ и $\alpha(1) = z$, и определим $\widetilde{f}(z)$ как конец поднятия пути $f \circ \alpha$ с началом в y_0.

Равенство $p \circ \widetilde{f} = f$ тривиально.
Надо проверить корректность и непрерывность.



Доказательство – 2

Корректность (почему $\widetilde{f}(z)$ не зависит от выбора α):
Пусть α, β — два пути из z_0 в z.
Тогда $\alpha\beta^{-1}$ — петля из $\Omega(Z, z_0)$.
Её образ $f \circ (\alpha\beta^{-1})$ представляет в π_1 элемент из $Im(f_*)$
$\implies$ он лежит в $Im(p_*)$ по условию $Im(f_*) \subset Im(p_*)$.
$\implies$ поднятие петли $f \circ (\alpha\beta^{-1})$ — тоже петля
$\implies$ поднятия $f \circ \alpha$ и $f \circ \beta$ имеют общие концы
$\implies$ $\widetilde{f}(z)$, определяемое с помощью α и β, одно и то же.



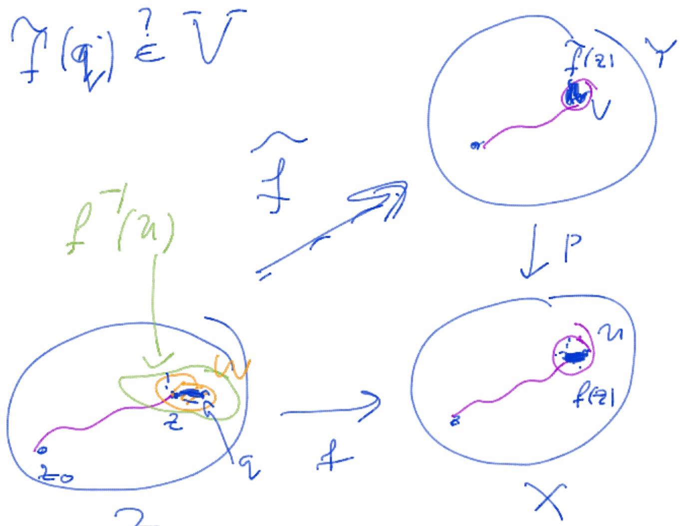
образ петли

$\alpha\beta^{-1}$
$\Cap$
$Im(f_*)$
$\cap$
$Im(p_*)$

Доказательство – 2

Корректность (почему $\widetilde{f}(z)$ не зависит от выбора α):
Пусть α, β — два пути из z_0 в z.
Тогда $\alpha\beta^{-1}$ — петля из $\Omega(Z, z_0)$.
Её образ $f \circ (\alpha\beta^{-1})$ представляет в π_1 элемент из $Im(f_*)$
$\implies$ он лежит в $Im(p_*)$ по условию $Im(f_*) \subset Im(p_*)$.
$\implies$ поднятие петли $f \circ (\alpha\beta^{-1})$ — тоже петля
$\implies$ поднятия $f \circ \alpha$ и $f \circ \beta$ имеют общие концы
$\implies$ $\widetilde{f}(z)$, определяемое с помощью α и β, одно и то же.

Непрерывность $\widetilde{f}$: Проверяем по определению, пользуясь локальной линейной связностью.



$z \in W \subset f^{-1}(U)$
линейно связная

Надо: $\widetilde{f}^{-1}(V)$ содержит окрестность z.

$\widetilde{f}$ – непр в т. z. $\Longleftarrow$ $\widetilde{f}(W) \subset V$