Содержание

Содержание

Формулировка (повтор)

Пусть $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ — накрытие.
Поднятие отображения $f\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ в данное накрытие — это такое $\widetilde{f}\colon (Z, z_0) \to (Y, y_0)$, что $p \circ \widetilde{f} = f$.

Теорема

Пусть Z линейно связно и локально линейно связно.

Поднятие отображения $f\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ в накрытие $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ существует тогда и только тогда, когда

$$Im(f_*) \subset Im(p_*),$$

где f_* и p_* — индуцированные гомоморфизмы фундаментальных групп.

При этом поднятие единственно.

Замечание

$Im(p_*)$ — группа накрытия. Она состоит из петель, которые не размыкаются при поднятии.

$$\begin{tikzcd}
 & Y, y_0 \arrow[d, "p"] \\
Z, z_0 \arrow[ur, dashed, "\tilde f"] \arrow[r, "f"] & X, x_0
\end{tikzcd}$$

Все линейно связно!

Односвязный случай

Следствие

В условиях теоремы, если Z односвязно, то поднятие всегда существует.

Доказательство.

$Im(f_*) = \{e\}$. □

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

односв

Содержание

Определения

Соглашение

Далее все пространства предполагаются линейно связными и локально линейно связными.

Определение

Пусть $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ и $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ — накрытия (с общей базой).

Морфизм накрытий — такое отображение $f\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, что $q \circ f = p$.

Изоморфизм накрытий — морфизм накрытий, у которого есть обратный.

изоморфизм

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, leftrightarrow, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Накрытие однозначно определяется группой

Пусть $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ и $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ — накрытия (как в определении).

Теорема

Морфизм накрытий $f: (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *существует тогда и только тогда, когда* $Im(p_*) \subset Im(q_*)$.
При этом он единственный.

Доказательство.

По теореме о поднятии. □

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Накрытие однозначно определяется группой

Пусть $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ и $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ — накрытия (как в определении).

Теорема

Морфизм накрытий $f\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *существует тогда и только тогда, когда* $Im(p_*) \subset Im(q_*)$.
При этом он единственный.

Доказательство.

По теореме о поднятии. □

Следствие

Если $Im(p_*) = Im(q_*)$, *то накрытия изоморфны.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, leftrightarrow, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Накрытие однозначно определяется группой

Пусть $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ и $q\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ — накрытия (как в определении).

Теорема

Морфизм накрытий $f\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ существует тогда и только тогда, когда $Im(p_*) \subset Im(q_*)$.
При этом он единственный.

Доказательство.

По теореме о поднятии. $\square$

Следствие

Если $Im(p_*) = Im(q_*)$, то накрытия изоморфны.

Следствие

Универсальное накрытие с базой X единственно с точностью до изоморфизма.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$g \circ f = id$
$f \circ g = id$

Y, Z – односв

единственность!

$\pi_1(Y) = \{e\}$
$\pi_1(Z) = \{e\}$

$Im(p_*) = p_*(\pi_1(X)) = \{e\}$

Зам. Изоморфизм накрытий – гомеоморфизм. накр. пр-в.

Содержание

Определение

Определение

Пусть $p\colon Y \to X$ — накрытие Автоморфизм этого накрытия — такой гомеоморфизм $f\colon Y \to Y$, что $p \circ f = p$.

Другие названия: скольжение, deck transformation.

Очевидно, автоморфизмы накрытия $p\colon Y \to X$ образуют группу относительно композиции. Она обозначается $\mathrm{Aut}(p)$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[loop above, "f"] \arrow[d, "p"] \\ X \end{tikzcd}$$

$$p : \mathbb{R} \to S^1$$

$$p(x) = (\cos x, \sin x).$$

$$f(x) = x + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Определение

Определение

Пусть $p\colon Y \to X$ — накрытие Автоморфизм этого накрытия — такой гомеоморфизм $f\colon Y \to Y$, что $p \circ f = p$.

Другие названия: скольжение, deck transformation.

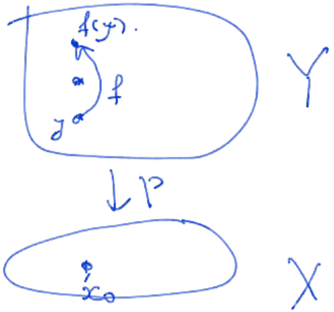
Очевидно, автоморфизмы накрытия $p\colon Y \to X$ образуют группу относительно композиции.
Она обозначается $\mathrm{Aut}(p)$.

Замечание

Условие $p \circ f = p$ равносильно тому, что для каждой точки $x_0 \in X$ отображение f переставляет точки из её прообраза $f^{-1}(x_0)$.

Неформальная терминология: f «переставляет листы накрытия».

$\forall y \quad p(f(y)) = p(y)$



Транзитивность на листах

Рассмотрим случай, когда накрытие универсально.

Теорема

Пусть $p\colon Y \to X$ — универсальное накрытие, $x_0 \in X$. Тогда для любых $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ существует единственный автоморфизм накрытия $f\colon Y \to Y$ такой, что $f(y_1) = y_2$.

Доказательство.

По теореме о поднятии для отмеченных точек y_1, y_2. □

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & (Y, y_2) \arrow[dl] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Транзитивность на листах

Рассмотрим случай, когда накрытие универсально.

Теорема

Пусть $p\colon Y \to X$ — универсальное накрытие, $x_0 \in X$. Тогда для любых $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ существует единственный автоморфизм накрытия $f\colon Y \to Y$ такой, что $f(y_1) = y_2$.

Доказательство.

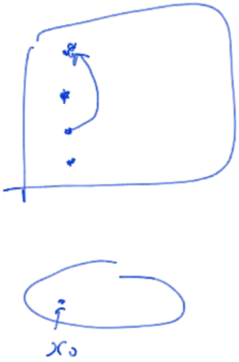
По теореме о поднятии для отмеченных точек y_1, y_2. □

Задача

Для не универсального накрытия теорема верна тогда и только тогда, когда группа накрытия $Im(p_*)$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X)$.
Это условие не зависит от выбора отмеченных точек.

Примечание: накрытия, удовлетворяющие этому условию, называются регулярными.

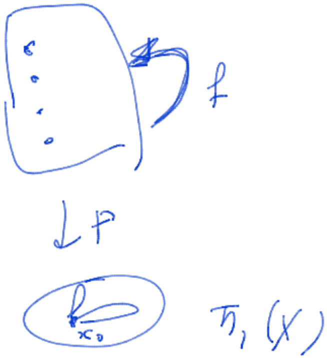
$$\begin{array}{ccc} Y & & \pi_1(Y) \\ \downarrow p & & \downarrow p_* \\ X & & \pi_1(X) \\ \cup & & \\ Im(p_*) & & \end{array}$$



Группа автоморфизмов универсального накрытия

Теорема

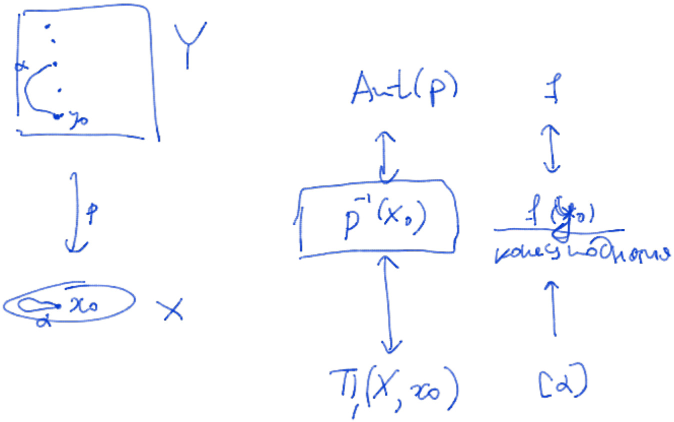
Для универсального накрытия $p\colon Y \to X$*, группа автомофизмов* $\mathrm{Aut}(p)$ *изоморфна* $\pi_1(X)$.



Доказательство – 1

Зафиксируем отмеченные точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, $p(y_0) = x_0$.
Построим отображение $\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(p)$:
для $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ пусть $\Phi([\alpha])$ — такой $f \in \mathrm{Aut}(p)$, что $f(y_0)$ — конец поднятия α с началом в y_0.

Из предыдущих теорем Φ корректно определено и биективно.
Осталось доказать, что Φ — гомоморфизм групп.



Доказательство – 2: гомоморфизм

Пусть $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, докажем, что

$$\boxed{\Phi([\alpha\beta]) \overset{?}{=} \Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta])}$$

Пусть $f = \Phi([\alpha])$, $g = \Phi([\beta])$,
$\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ — поднятия α, β с началом y_0.
Тогда $\widetilde{\alpha}(1) = f(y_0)$, $\widetilde{\beta}(1) = g(y_0)$.

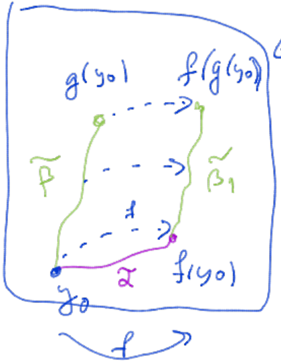
Рассмотрим путь $\widetilde{\beta}_1 = f \circ \widetilde{\beta}$.
Это поднятие β с началом $f(y_0)$ и концом $f(g(y_0))$.

Рассмотрим путь $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_1$ в Y (он определён, так как $\widetilde{\alpha}(1) = f(y_0) = \widetilde{\beta}_1(0)$).

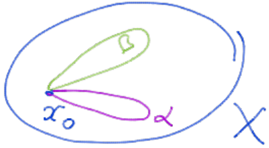
Это поднятие пути $\alpha\beta$ с началом y_0.
Значит, $\Phi([\alpha\beta])(y_0) = f(g(y_0)) = f \circ g(y_0)$.

Из единственности такого автоморфизма получаем требуемое: $\Phi([\alpha\beta]) = f \circ g = \Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta])$.

Теорема доказана



конец пути $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_1$ — поднятие $\alpha\beta$ с началом в y_0.



$f = \varphi([\alpha])$
$g = \varphi([\beta])$

Комментарии: действие фундаментальной группы на универсальном накрывающем

Построенный гомоморфизм

$$\Phi\colon \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(p)$$

можно интерпретировать как (левое) действие группы $\pi_1(X)$ на Y.

$\in Y$

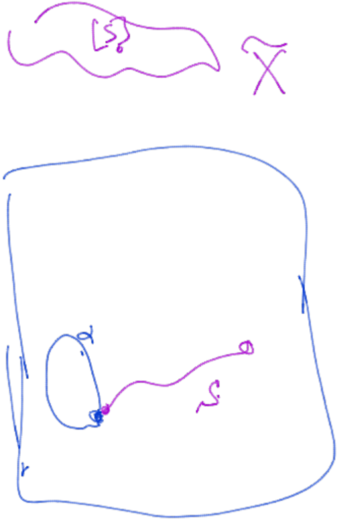
Различие в форме записи: вместо $\Phi(g)(y)$ пишем $g \cdot y$, ($g \in \pi_1(X)$, $y \in Y$).

Задача

Пусть $Y = \widetilde{X}$ построено как в доказательстве теоремы о существовании универсального накрытия.
Т.е. точка из $\widetilde{X}$ — класс гомотопных путей из x_0.
Тогда действие можно описать как умножение путей:

$$\Phi([\alpha])([s]) = [\alpha s],$$

где $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, s — путь из x_0.



Информация: группа голономии

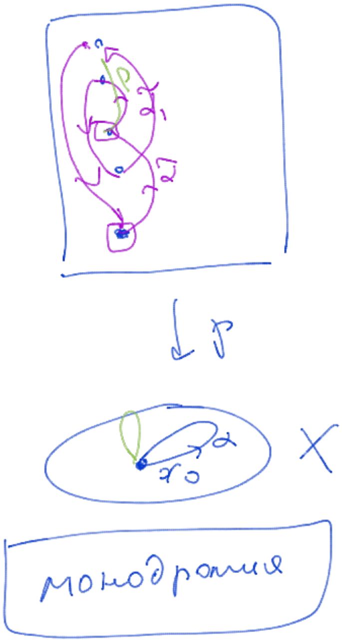
Пусть $p\colon Y \to X$ — произвольное накрытие (не обязательно универсальное, не обязательно регулярное). Пусть $x_0 \in X$.

Имеется естественное правое действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на множестве $p^{-1}(x_0)$:
для $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ и $y \in p^{-1}(x_0)$ определяем $y \cdot [\alpha]$ как конец поднятия петли α с началом y.

Легко проверить, что это определение корректно и задает правое действие.

Соответствующая подгруппа группы перестановок множества $p^{-1}(x_0)$ называется группой голономии.

Примечание: термин относится к более общим структурам, чем накрытия.



Содержание

$\mathbb{R} \circlearrowleft^{\mathbb{Z}}$

Действие группы на топологическом пространстве

Пусть X — топологическое пространство, G — дискретная группа.
Обозначение: $\mathrm{Homeo}(X)$ — группа гомеоморфизмов из X в себя.

$$\begin{array}{ccc}(g,x) & \to & g\cdot x\\ \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$}\\ G\times X & & X\end{array}$$

Определение

(Левое) действие G на X — это любое из двух:

- Гомоморфизм групп $\Phi\colon G \to \mathrm{Homeo}(X)$.
  Вместо $\Phi(g)$ обычно пишут Φ_g.
- Непрерывное отображение из $G \times X$ в X, обычно записываемое как умножение, обладающее свойством:
  $$\boxed{(gh)x = g(hx)}$$
  для любых $g, h \in G$, $x \in X$.

Два определения отличаются только формой записи: gx во втором — то же, что $\Phi_g(x)$ в первом.

Факторпространство по действию группы

Определение

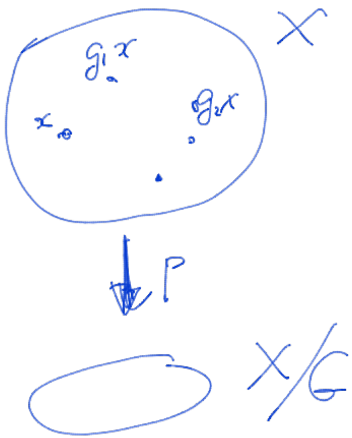
Пусть задано действие G на X. Введем отношение эквивалентности на X: точки $x, y \in X$ эквивалентны, если существует такой $g \in G$, что $gx = y$.

(Легко проверить, что это отношение эквивалентности. Классы эквивалентности называются орбитами.)

Фактопространство X по этому отношению называется факторпространством по действию группы или пространством орбит.

Обозначение: X/G или $G\backslash X$.

$X/G \qquad G\backslash X$



$g_1, g_2, \dots \in G$

Факторпространство по действию группы

Определение

Пусть задано действие G на X. Введем отношение эквивалентности на X: точки $x, y \in X$ эквивалентны, если существует такой $g \in G$, что $gx = y$.

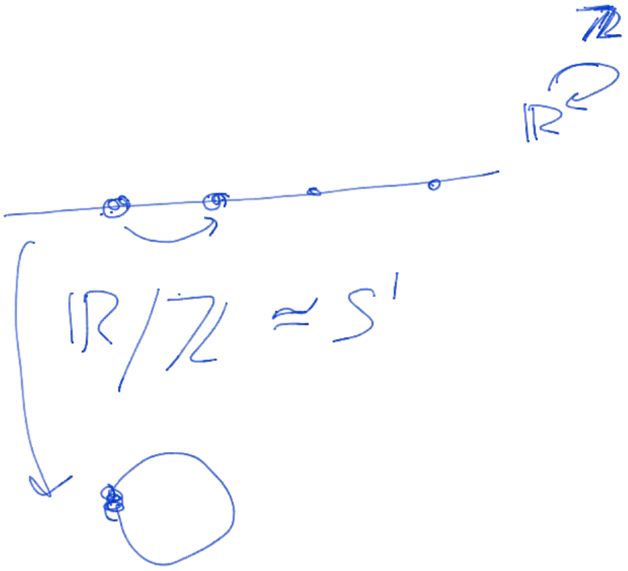
(Легко проверить, что это отношение эквивалентности. Классы эквивалентности называются орбитами.)

Фактопространство X по этому отношению называется факторпространством по действию группы или пространством орбит.

Обозначение: X/G или $G\backslash X$.

Пример

$\mathbb{Z}$ естественно действует на $\mathbb{R}$ параллельными переносами: $\Phi_g(x) = x + g$, $g \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Факторпространство $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ этого действия — окружность.



Накрывающие действия

Определение

Действие G на X — накрывающее (англ: covering space action), если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что множества $\{gU\}_{g \in G}$ дизъюнктны.

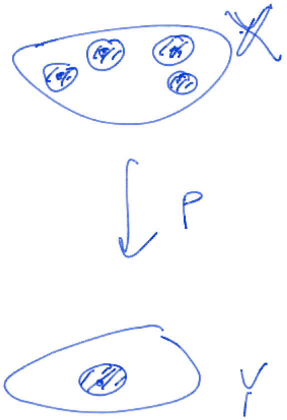
Накрывающие действия

Определение

Действие G на X — накрывающее (англ: covering space action), если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что множества $\{gU\}_{g \in G}$ дизъюнктны.

Свойства:

- Действие группы накрытия $\mathrm{Aut}(p)$ — накрывающее.
- Если действие группы G — накрывающее, то действие любой подгруппы $H < G$ — тоже.



Накрывающие действия

Определение

Действие G на X — накрывающее (англ: covering space action), если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что множества $\{gU\}_{g \in G}$ дизъюнктны.

Свойства:

- Действие группы накрытия $\mathrm{Aut}(p)$ — накрывающее.
- Если действие группы G — накрывающее, то действие любой подгруппы $H < G$ — тоже.

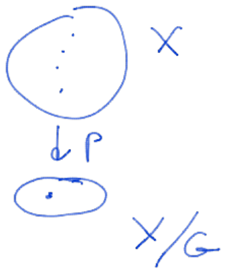
Замечание

Термин «накрывающее действие» — калька с английского, в русскоязычных источниках он редок. Вместо него встречаются термины вполне разрывное действие, собственно разрывное действие (англ: properly discontinuous action).
Определения этих терминов в разных местах не эквивалентны.

Факторизация по накрывающему действию

Теорема

Пусть G действует на X, и это действие накрывающее. Тогда проекция $p\colon X \to X/G$ — накрытие. Если X односвязно, то $\pi_1(X/G) \simeq G$.

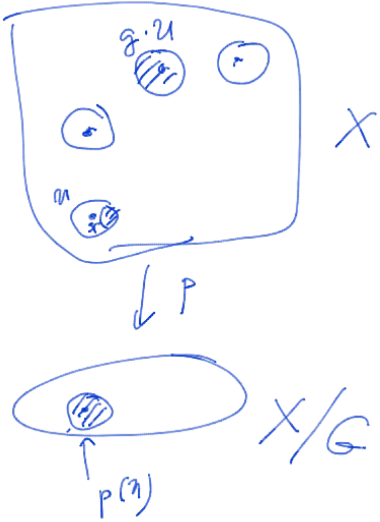


Теорема

Пусть G действует на X, и это действие накрывающее. Тогда проекция $p\colon X \to X/G$ — накрытие. Если X односвязно, то $\pi_1(X/G) \simeq G$.

Доказательство.

1. Если U — окрестность из определения накрывающего действия, то $p(U)$ — правильно накрываемая окрестность в X/G.



Упр. ∀ действия группы.
$p: X \Rightarrow X/G$ - открытое отобр-е

Факторизация по накрывающему действию

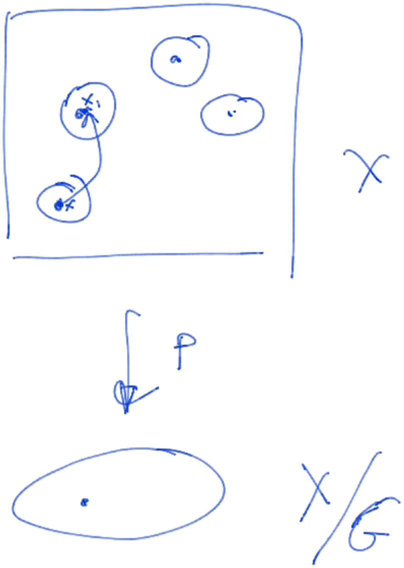
Теорема

Пусть G действует на X, и это действие накрывающее.
Тогда проекция $p\colon X \to X/G$ — накрытие.
Если X односвязно, то $\pi_1(X/G) \simeq G$.

Доказательство.

1. Если U — окрестность из определения накрывающего действия, то $p(U)$ — правильно накрываемая окрестность в X/G.

2. Можно считать, что $G \subset \mathrm{Homeo}(X)$, так как действие эффективно ($gx = hx \implies g = h$).
Элементы G — автоморфизмы накрытия, так как они переставляют точки в каждой орбите. И это все автоморфизмы, так как автоморфизм накрытия однозначно определяется образом одной точки.
Значит, $G \simeq \mathrm{Aut}(p) \simeq \pi_1(X\cancel{)}/G)$. □



Любое накрытие имеет такой вид

Факт

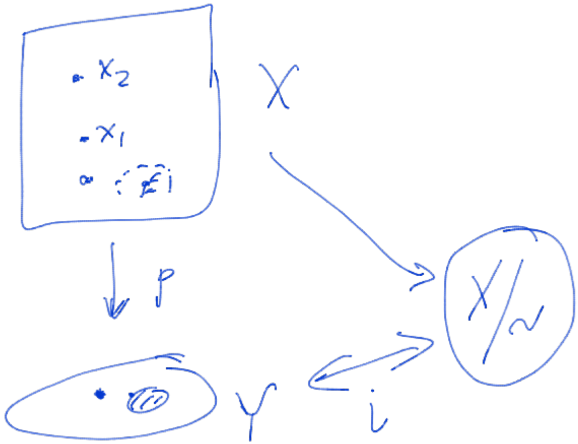
Пусть $p\colon X \to Y$ — накрытие. Тогда Y естественно гомеоморфно $X/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на X, определяемое условием

$$\boxed{x_1 \sim x_2 \iff p(x_1) = p(x_2)}$$

В частности, если p — универсальное накрытие, то Y естественно гомеоморфно $X/\operatorname{Aut}(p)$.

Доказательство.

Множество $U \subset Y$ открыто $\iff$ $p^{-1}(U)$ открыто. Это следует из определения накрытия. □



$\Rightarrow$ непр

$\Leftarrow$

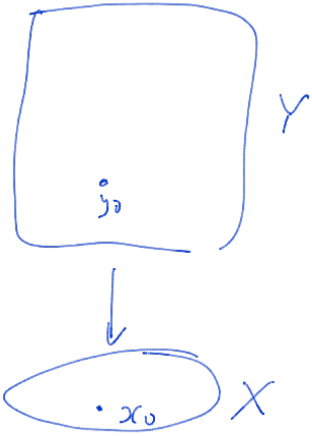
Построение накрытия с данной группой

Теорема

Пусть X — хорошее пространство (линейно связное, локально линейно связное, полулокально односвязное, как в теореме о существовании универсального накрытия). Пусть $x_0 \in X$.

Тогда для любой подгруппы $\boxed{H < \pi_1(X, x_0)}$ существует накрытие $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ такое, что $Im(p_*) = H$.

Это накрытие единственно с точностью до изоморфизма накрытий.

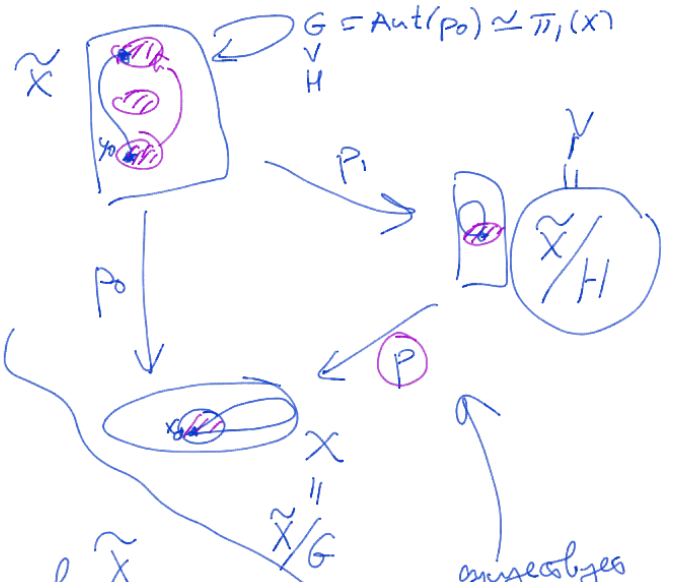


Доказательство (план)

Существует универсальное накрытие $p_0\colon \widetilde{X} \to X$. ✓
Отождествим $\pi_1(X, x_0)$ с группой $G = \mathrm{Aut}(p_0)$. ✓
Можно считать, что $X = \widetilde{X}/G$ (из предыдущего факта). ✓

Положим $Y = \widetilde{X}/H$, и пусть $p_1\colon \widetilde{X} \to Y$ — соответствующая проекция (отображение факторизации).

Из свойств факторпространств существует непрерывное ✓
$p\colon Y \to X$ такое, что $p_0 = p \circ p_1$.
Это p — искомое накрытие. ☑



$\mathrm{Im}(p_*) = \{$петли, кот-е не размыкаются при поднятии в $Y\}$
$= \{$петли, у кот-х поднятие в $\widetilde{X}$ соединяет y_0 с $h \cdot y_0$, где $h \in H\}$
— отождествлено с H при биекции $\pi_1(X) \leftrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{X})$.

Для записей

Иерархия накрытий

Рассмотрим всевозможные накрытия с фиксированной «хорошей» базой (X, x_0) в категории пространств с отмеченной точкой. Накрытия рассматриваем с точностью до ~~эквивалентности~~. изоморфизма

Иерархия накрытий

Рассмотрим всевозможные накрытия с фиксированной «хорошей» базой (X, x_0) в категории пространств с отмеченной точкой. Накрытия рассматриваем с точностью до эквивалентности.

Из предыдущих результатов следует:

- Имеется биекция между накрытиями и подгруппами $\pi_1(X, x_0)$: для каждой подгруппы $H < \pi_1(X, x_0)$ существует единственное накрытие p, для которого $H = Im(p_*)$.

Иерархия накрытий

Рассмотрим всевозможные накрытия с фиксированной «хорошей» базой (X, x_0) в категории пространств с отмеченной точкой. Накрытия рассматриваем с точностью до эквивалентности.

Из предыдущих результатов следует:

- Имеется биекция между накрытиями и подгруппами $\pi_1(X, x_0)$: для каждой подгруппы $H < \pi_1(X, x_0)$ существует единственное накрытие p, для которого $H = Im(p_*)$.
- Отношению включения подгрупп $H_1 < H_2$ при этой биекции соответсвует такое отношение порядка между накрытиями:
  для соответствующих накрытий
  $p_1 \colon (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ и $p_2 \colon (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$
  существует непрерывное $p \colon (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$
  такое, что $p_1 = p_2 \circ p$. При этом p — тоже накрытие.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\overset{f}{\overset{\shortparallel}{p}}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Z \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Для записей

Содержание

Начинаем дифференциальную геометрию

Будем изучать дифференциальную геометрию кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ (на самом деле — в n-мерном евклидовом пространстве).

Термины:

- Гладкий — класса C^∞.

Начинаем дифференциальную геометрию

Будем изучать дифференциальную геометрию кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ (на самом деле — в n-мерном евклидовом пространстве).

Термины:

- Гладкий — класса C^∞.
- Гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ — гладкое отображение $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал.

  Чтобы не тонуть в случаях, обычно будем рассматривать только отрезки $I = [a, b]$.
  Для других видов интервалов всё аналогично.

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$

Начинаем дифференциальную геометрию

Будем изучать дифференциальную геометрию кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ (на самом деле — в n-мерном евклидовом пространстве).

Термины:

- Гладкий — класса C^∞.
- Гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ — гладкое отображение $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал.

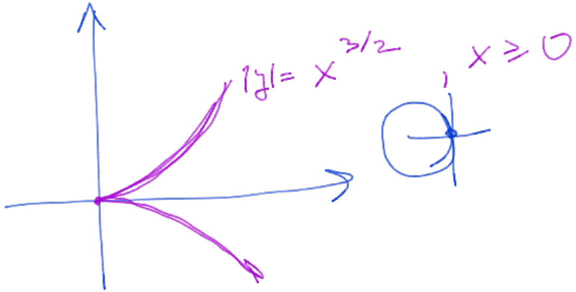
  Чтобы не тонуть в случаях, обычно будем рассматривать только отрезки $I = [a, b]$.
  Для других видов интервалов всё аналогично.
- Регулярная кривая — такая гладкая кривая $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, у которой производная нигде не обращается в ноль ($\forall t \in I\ \gamma'(t) \neq 0$).

  Пример: $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ — гладкая, но не регулярная кривая на плоскости. Её изображение не выглядит «гладкой» линией.

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots \gamma_n(t))$$

$$\boxed{\gamma'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\gamma(t+\varepsilon) - \gamma(t)}{\varepsilon}}$$

$$= (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

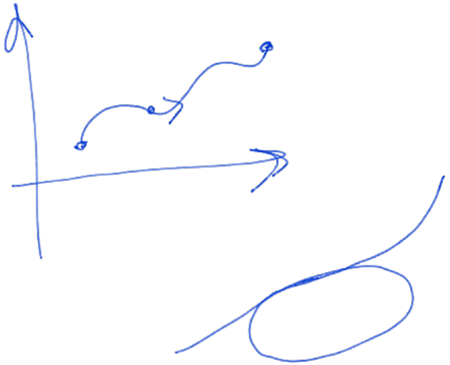


Упр Рег. кривая локально — график гл. ф-ции $y = f(x)$
$x = f(y)$

Как отличить геометрию от матанализа

К геометрическим свойствам или характеристикам кривых относятся только те, которые

- Сохраняются при движениях (или хотя бы при движениях, сохраняющих ориентацию)
- Сохраняются при заменах параметра (определение будет позже)



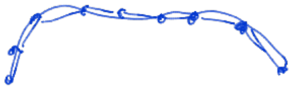
Содержание

Определение

Определение

Длина кладкой кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — это

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$



Определение

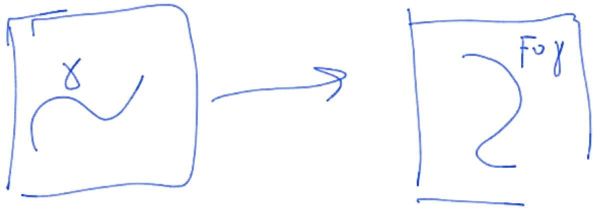
Определение

Длина кладкой кривой $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ — это

$$\ell(\gamma)=\int_a^b|\gamma'|=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt$$

Факт

Длина сохраняется при движениях. Т.е., если $F\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — движение, то $\ell(F\circ\gamma)=\ell(\gamma)$.



Определение

Длина кладкой кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — это

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

Факт

Длина сохраняется при движениях. Т.е., если $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — движение, то $\ell(F \circ \gamma) = \ell(\gamma)$.

Доказательство.

F — композиция ортогонального преобразования и параллельного переноса.
Для параллельных переносов утверждение очевидно.
Для ортогональных пользуемся тем, что дифференцирование коммутирует с линейными отображениями. □

$\forall\ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\forall$ линейного $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(L \circ \gamma)'(t) = L(\gamma'(t))$$

$$L \in O(n)$$

$$|(L \circ \gamma)'(t)| = |\gamma'(t)|$$

Кратчайшие в $\mathbb{R}^n$ — отрезки

Теорема

Для любой гладкой кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\ell(\gamma) \ge |\gamma(a) - \gamma(b)|.$$

(Длина не меньше расстояния между концами).

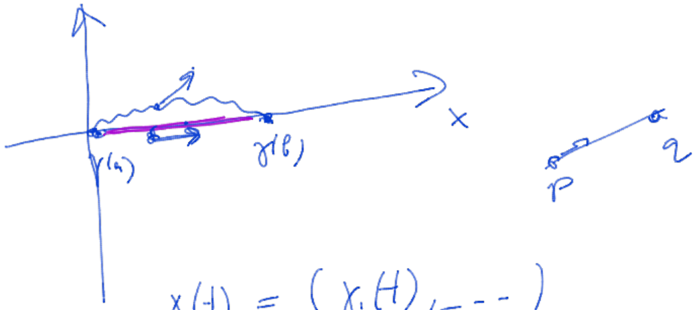
Доказательство.

Проекция на прямую, проходящую через концы, не увеличивает длину $\implies$ достаточно доказать для $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

В этом случае, считая, что $\gamma(b) > \gamma(a)$:

$$\boxed{\int_a^b |\gamma'| \ge \left|\int_a^b \gamma'\right|} = \underbrace{\gamma(b) - \gamma(a)} = |\gamma(b) - \gamma(a)|$$

□



$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots)$

Новая кривая — $\gamma_1(t) \subset \mathbb{R}$

$= Pr_{0x} \circ \gamma'$

$|\gamma_1'| \le |\gamma'|. \Rightarrow \ell(\gamma_1) \le \ell(\gamma)$

Перепараметризуем γ_1 ...

Упр Если $\gamma(t) = t \cdot p + (1-t) \cdot q$
То равенство

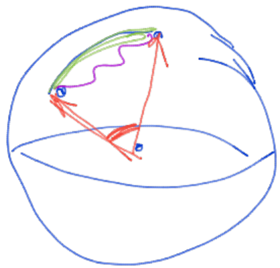
Кратчайшие на сфере — дуги больших кругов

Теорема

Для любой гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{S}^{n-1}$, *где* $\mathbb{S}^{n-1}$ *— множество единичных векторов в* $\mathbb{R}^n$,

$$\ell(\gamma) \geq \angle(\gamma(a), \gamma(b)),$$

где $\angle$ *обозначает угол между векторами.*



Доказательство

Зафиксируем малое $\delta > 0$ и разобьем $[a, b]$ на отрезки длины меньше δ точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. Обозначим $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ для $i = 1, \dots, N$.

Тогда по предыдущей теореме

(1) $$\ell(\gamma) = \sum \ell(\gamma_i) \geq \sum |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Каждое слагаемое $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ оценивается снизу через угол:

(2) $$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \geq (1 - \varepsilon) \cdot \angle(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\delta \to 0$. (Это следует из сходимости $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$.)

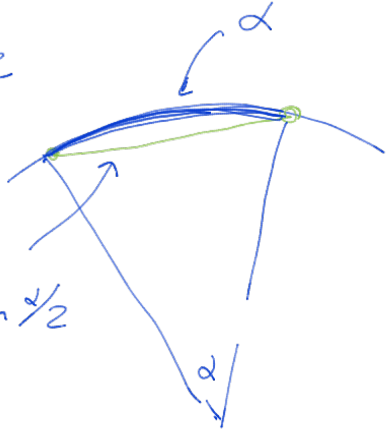
Складывая и применяя неравенство треугольника для углов, получаем $\ell(\gamma) \geq (1 \cancel{- \varepsilon})\angle(\gamma(a), \gamma(b))$.

Это верно для сколь угодно малых $\varepsilon \implies$ теорема доказана.

$\max \alpha \to 0$
при $\delta \to 0$.

$$\frac{2\sin \alpha/2}{\alpha} > 1 - \varepsilon$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta) \to 0$$



Для записей

Правая часть (1) $\geqslant (1-\varepsilon) \sum \angle(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \geqslant$

$\geqslant (1-\varepsilon) \angle(\gamma(a), \gamma(b))$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Нер-во } \Delta \text{ для углов.} \\ \forall v, u, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \angle(u,v) + \angle(v,w) \geqslant \angle(u,w\end{array}}$