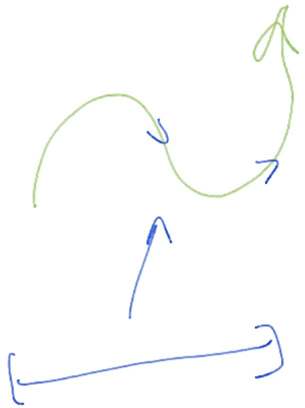
# Содержание





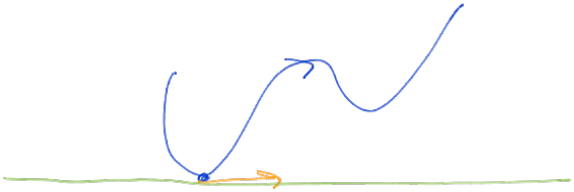
# Напоминание: регулярные кривые

**Определение**

Регулярная кривая — гладкое отображение $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ (где $I \subset \mathbb{R}^n$ — интервал), такое, что $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in I$.

Дальше будем рассматривать только такие кривые.

# Напоминание: регулярные кривые



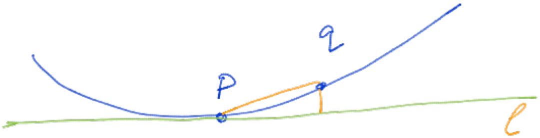
## Определение

Регулярная кривая — гладкое отображение $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ (где $I \subset \mathbb{R}^n$ — интервал), такое, что $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in I$.

Дальше будем рассматривать только такие кривые.

## Определение

Касательная к регулярной кривой $\gamma$ в точке $t \in I$ — прямая, проходящая через точку $\gamma(t)$ в направлении вектора $\gamma'(t)$.




## Замечание

Кривая $\gamma$ имеет касание первого порядка со своей касательной $\ell$ в точке $t$.
То есть, для $p = \gamma(t)$, $q = \gamma(t + \varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$,

$$d(q, \ell) = o(|q - p|)$$

$q \to p$

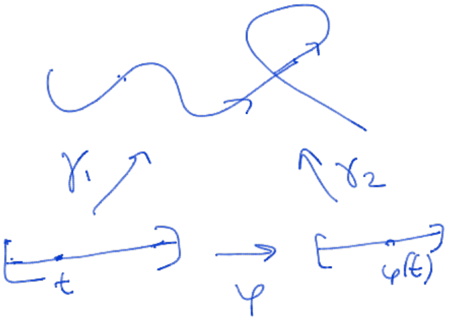
# Содержание

## Определение

Будем называть регулярные кривые $\gamma_1 \colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 \colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ эквивалентными, если существует гладкая биекция $\varphi \colon I_1 \to I_2$ такая, что

- $\varphi'(t) > 0$ для всех $t \in I_1$
- $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ (т.е. $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ для всех $t$).

Функция $\varphi$ называется заменой параметра или перепараметризацией.



## Определение

Будем называть регулярные кривые $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ эквивалентными, если существует гладкая биекция $\varphi : I_1 \to I_2$ такая, что

- $\varphi'(t) > 0$ для всех $t \in I_1$
- $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ (т.е. $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ для всех $t$).

Функция $\varphi$ называется заменой параметра или перепараметризацией.

## Замечание

Если кривые эквивалентны, то у них один и тот же образ в $\mathbb{R}^n$, и его точки проходятся в том же порядке.

# Определение

## Определение

Будем называть регулярные кривые $\gamma_1 \colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 \colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ эквивалентными, если существует гладкая биекция $\varphi \colon I_1 \to I_2$ такая, что

- $\varphi'(t) > 0$ для всех $t \in I_1$
- $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ (т.е. $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ для всех $t$).

Функция $\varphi$ называется заменой параметра или перепараметризацией.

## Замечание

Если кривые эквивалентны, то у них один и тот же образ в $\mathbb{R}^n$, и его точки проходятся в том же порядке.

## Замечание

При замене параметра с положительной производной из регулярной кривой всегда получается регулярная.

# Это отношение эквивалентности

**Теорема**

*Введенное отношение — действительно отношение эквивалентности на множестве всех регулярных кривых.*

## Это отношение эквивалентности

**Теорема**

*Введенное отношение — действительно отношение эквивалентности на множестве всех регулярных кривых.*

**Доказательство.**

1. Рефлексивность: возьмем $\varphi = id$.
2. Симметричность: условие $\varphi' > 0$ гарантирует, что обратная функция $\varphi^{-1} : I_2 \to I_1$ тоже гладкая.
3. Транзитивность: возьмем композицию замен параметра. □

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$

$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi \qquad \exists \varphi^{-1}$

$\gamma_1 \circ \varphi^{-1} = \gamma_2$

$\varphi' > 0 \Rightarrow \varphi^{-1} \in C^\infty$

$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi, \quad \gamma_2 = \gamma_3 \circ \psi$

$\gamma_1 = \gamma_3 \circ (\psi \circ \varphi)$

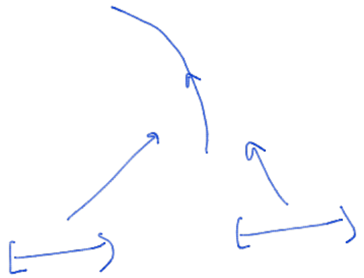
# Это отношение эквивалентности

**Теорема**

*Введенное отношение — действительно отношение эквивалентности на множестве всех регулярных кривых.*

**Доказательство.**

1. Рефлексивность: возьмем $\varphi = id$.
2. Симметричность: условие $\varphi' > 0$ гарантирует, что обратная функция $\varphi^{-1}\colon I_2 \to I_1$ тоже гладкая.
3. Транзитивность: возьмем композицию замен параметра. $\square$



Термины:

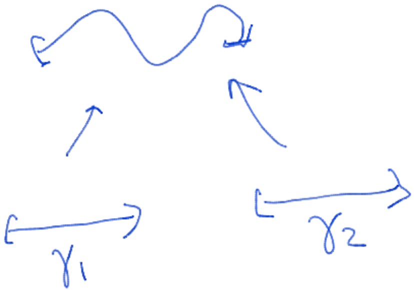
Класс эквивалентности кривых, связанных заменами параметра, называется непараметризованной кривой.

Представители класса эквивалентности — параметризации этой кривой.

# Кривая и её образ

## Задача

Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ инъективны, определены на отрезках, и их образы совпадают. Тогда они эквивалентны с точностью до замены направления обхода (замены параметра $t \mapsto -t$).




$$\left[\begin{array}{l} \gamma_1 \sim \gamma_2 \\ \gamma_1(t) = \gamma_2(-t) \end{array}\right.$$

# Замена параметра сохраняет длину

**Теорема**

*Длины эквивалентных кривых равны.*

# Замена параметра сохраняет длину

## Теорема

*Длины эквивалентных кривых равны.*

## Доказательство.

Докажем равенство длин для кривых $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma \circ \varphi$, где $\varphi$ — допустимая замена параметра.
Утверждение сводится к тождеству

$$\ell(\gamma\circ\varphi) \quad \int_{\varphi(I)} |(\gamma \circ \varphi)'(t)|\, dt \overset{?}{=} \int_I |\gamma'(t)|\, dt. = \ell(\gamma) \qquad (1)$$

Левая часть равна ||

$$\int_{\varphi(I)} |\gamma'(\varphi(t))|\, \varphi'(t)\, dt = \int_I |\gamma'(x)|\, dx = \ell(\gamma). \qquad (2)$$

(замена переменной в интеграле: $x = \varphi(t)$). □

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$

$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|.$

$|\gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)|$

$f(x) = |\gamma'(x)|$

лев.ч $= \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$

$= \int f(x)\, dx$

# Содержание

# Определение и формулировка

## Определение

Гладкая кривая $\gamma$ называется натурально параметризованной, если $|\gamma'(t)| = 1$ для всех $t$.

# Определение и формулировка

## Определение

Гладкая кривая $\gamma$ называется натурально параметризованной, если $|\gamma'(t)| = 1$ для всех $t$.

## Теорема

*У любой регулярной кривой есть натуральная параметризация.*
*Она единственна с точностью до замены параметра* $t \mapsto t + const$.

V

# Доказательство: существование

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — регулярная кривая, $L = \ell(\gamma)$.

Определим функцию $\lambda(t) = \int_a^t |\gamma'|$.

Её множество значений — $[0, L]$, при этом $\lambda' = |\gamma'| > 0$.

$\implies$ существует гладкая обратная функция

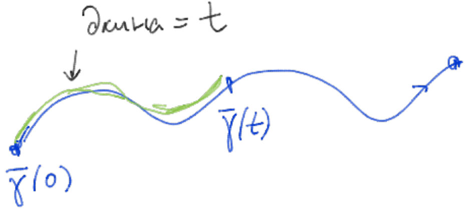
$$\varphi = \lambda^{-1}\colon [0, L] \to [a, b].$$

Докажем, что $\gamma \circ \varphi$ — искомая натуральная параметризация:

$$|(\gamma \circ \varphi)'(t)| = |\gamma'(\varphi(t))|\,\varphi'(t) = \frac{\lambda'(\varphi(t))}{\lambda'(\varphi(t))} = 1 \qquad (1)$$

так как

$$\varphi'(t) = (\lambda^{-1})'(t) = \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(t))} = \boxed{\frac{1}{\lambda'(\varphi(t))}} \qquad (2)$$




$\bar\gamma$ – натур. параметриз.

$\lambda\colon[a,b] \to [0,L]$

$\boxed{\lambda' = |\gamma'| > 0.}$

$\bar\gamma(t) = \gamma(\varphi(t)) = \gamma(\lambda^{-1}(t))$

# Доказательство: единственность

Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — две натуральные параметризации одной кривой, $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Тогда

$$1 = |\gamma_1'(t)| = |\gamma_2'(\varphi(t))|\,\varphi'(t) = \boxed{\varphi'(t)}$$

$$\implies \varphi' \equiv 1 \implies \varphi(t) = t + const.$$

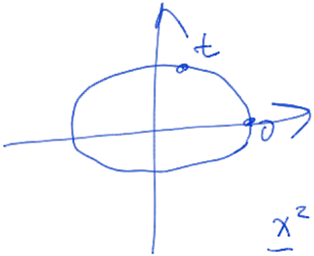
Теорема доказана

## Комментарии

- Чтобы гарантировать, что изучаемые свойства кривых не зависят от выбора параметризации, можно определять их только для натурально параметризованных кривых.

# Комментарии

- Чтобы гарантировать, что изучаемые свойства кривых не зависят от выбора параметризации, можно определять их только для натурально параметризованных кривых.
- Но при практических вычислениях переходить к натуральным параметризациям неудобно. Натуральную параметризацию не всегда можно найти в явном виде. Например, длина дуги эллипса — неберущийся интеграл.




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$$

$$\int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$$

не интегрируется "в квадратурах"

# Содержание



$$f\cdot g(t+\varepsilon) =$$

$$= f(t+\varepsilon)\cdot g(t+\varepsilon) =$$

Знамен.

$$= \left(f(t) + f'(t)\cdot\varepsilon + o(\varepsilon)\right)\cdot \left(g(t) + g'(t)\cdot\varepsilon + o(\varepsilon)\right) =$$

$$= f(t)\cdot g(t) + \varepsilon\left(f(t)\cdot g'(t) + f'(t)\cdot g(t)\right) + o(\varepsilon)$$

# Дифференцирование скалярного произведения

## Теорема

*Для гладких функций* $f, g\colon I \to \mathbb{R}^n$

$$\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$$

*(угловые скобки обозначают скалярное произведение).*

Доказательство тривиально.

## Замечание

Аналогичное равенство верно для любых билинейных операций. Например, для применения переменной матрицы к переменному вектору.

$f = f(t)$, $g = g(t)$

$f(t), g(t) \in \mathbb{R}^n$.

$\langle f(t), g(t)\rangle' = \ldots$

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots)$

$g(t) = (g_1(t), \ldots)$

$\langle f, g\rangle(t) = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots$

$\langle f, g\rangle' = f_1' g_1 + f_1 g_1' + \ldots$

$A(t)$ – матрица

$v(t)$ – вектор.

$(A(t)\cdot v(t))' = A'\cdot v + A\cdot v'$.

# Дифференцирование скалярного произведения

## Теорема

*Для гладких функций* $f, g\colon I \to \mathbb{R}^n$

$$\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$$

*(угловые скобки обозначают скалярное произведение).*

Доказательство тривиально.

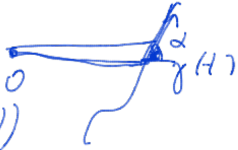
## Замечание

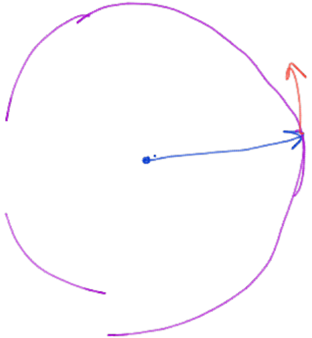
Аналогичное равенство верно для любых билинейных операций. Например, для применения переменной матрицы к переменному вектору.

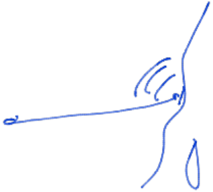
## Следствие

*Если* $|f| = const$, *то* $f'(t) \perp f(t)$ *при всех* $t$.
*(И обратно.)*

Упр. $|\gamma(t)|' =$
$= |\gamma'(t)| \cdot \cos\angle(\gamma(t), \gamma'(t))$






$\langle f, f\rangle = const$

$\langle f, f\rangle' = 0$

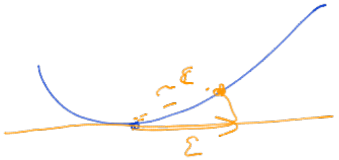
$\parallel$

$2\langle f, f'\rangle \Rightarrow f' \perp f$

# Содержание



$\sim$ 19:00 –
тестовая консультации

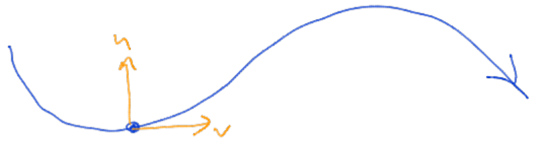


# Базис Френе

**Соглашение**

Далее все кривые предполагаются натурально параметризованными, если явно не указано обратное.

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованная кривая.




$v_\gamma(t)$, $n_\gamma(t)$

**Определение**

Базис Френе кривой $\gamma$ в точке $t \in I$ — пара векторов $v, n \in \mathbb{R}^2$, определяемая условиями:

- $v = \gamma'(t)$
- $(v, n)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости.

Обозначения: $v$, $n$ или $v(t)$, $n(t)$ или $v_\gamma(t)$, $n_\gamma(t)$.

Названия: $v$ — скорость, $n$ — нормаль.

# Базис Френе

## Соглашение

Далее все кривые предполагаются натурально параметризованными, если явно не указано обратное.

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованная кривая.

## Определение

Базис Френе кривой $\gamma$ в точке $t \in I$ — пара векторов $v, n \in \mathbb{R}^2$, определяемая условиями:

- $v = \gamma'(t)$
- $(v, n)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости.

Обозначения: $v$, $n$ или $v(t)$, $n(t)$ или $v_\gamma(t)$, $n_\gamma(t)$.

Названия: $v$ — скорость, $n$ — нормаль.

## Замечание

Если в координатах $v = (x, y)$, то $n = (-y, x)$.

Отсюда следует, что $n$ гладко зависит от $t$.

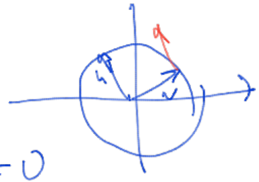
# Определение кривизны

Наблюдение: $|v| \equiv 1 \implies v' \perp v \implies v' \parallel n.$ V

$\langle v, v\rangle' = 0$

$\parallel$

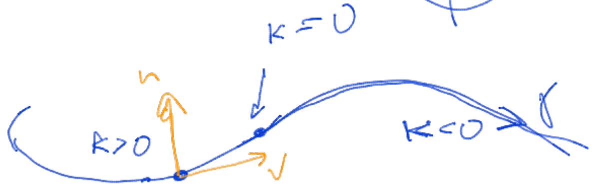
$2\langle v, v'\rangle$



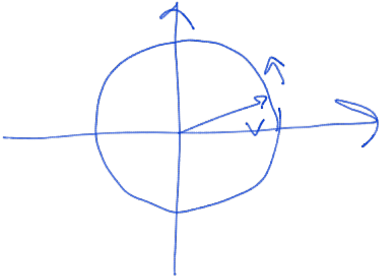

**Определение**

Кривизна натуральнo параметризованной кривой $\gamma$ в точке $t$ — такое число $\kappa = \kappa(t) \in \mathbb{R}$, что

$$\gamma''(t) = v'(t) = \kappa(t) \cdot n(t) = \cancel{\kappa(t) \cdot \gamma''(t)}$$




Аргумент $t$, как правило, не пишется: $v' = \kappa n$.



# Определение кривизны

Наблюдение: $|v| \equiv 1 \implies v' \perp v \implies v' \parallel n.$

## Определение

Кривизна натурально параметризованной кривой $\gamma$ в точке $t$ — такое число $\kappa = \kappa(t) \in \mathbb{R}$, что

$$v'(t) = \kappa(t) \cdot n(t) \cancel{= \kappa(t) \cdot \gamma''(t)}$$

Аргумент $t$, как правило, не пишется: $v' = \kappa n$.

## Замечание

Эквивалентное определение:

$$\boxed{\kappa = \langle v', n \rangle.}$$

Из этой формулы следует, что $\kappa$ гладко зависит от $t$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Опр. $f'(t) = \lim\limits_{c \to 0} \dfrac{f(t+c) - f(t)}{c}$

Если $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots)$

то $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots)$

# Свойства кривизны

Кривизна —

- сохраняется при движениях, сохраняющих ориентацию (поворотах и параллельных переносах);

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот.

$\tilde{\gamma} = L \circ \gamma.$

$\Downarrow$

$\tilde{\gamma}' = L(\gamma').$ $\quad \tilde{v} = L(v)$

$\tilde{\gamma}'' = L(\gamma'').$ $\quad \tilde{n} = L(n)$

...

# Свойства кривизны

Кривизна —

- сохраняется при движениях, сохраняющих ориентацию (поворотах и параллельных переносах);
- меняет знак при движениях, меняющих ориентацию (осевых и скользящих симметриях)

$L$ — симметрия

$\tilde{\gamma} = L \circ \gamma$.

$\tilde{\gamma}' = L(\gamma')$ $\qquad \tilde{v} = L(v)$

$\tilde{\gamma}'' = L(\gamma'')$ $\qquad \tilde{n} = -L(n)$

$\tilde{k} = -k$

# Свойства кривизны

Кривизна —

- сохраняется при движениях, сохраняющих ориентацию (поворотах и параллельных переносах);
- меняет знак при движениях, меняющих ориентацию (осевых и скользящих симметриях)
- меняет знак при обращении направления обхода (т.е. при замене параметра $t \mapsto -t$).

$\gamma(t)$

$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$

$\tilde{\gamma}' = -\gamma'$ $\qquad$ $\tilde{v} = -v.$

$\tilde{\gamma}'' = \gamma''$ $\qquad$ $\tilde{n} = -n$

$$\tilde{k} = \langle \tilde{\gamma}'', \tilde{n} \rangle = -k.$$

# Примеры

## Пример (кривизна прямой)

Для прямой натуральная параметризация имеет вид $\gamma(t) = p + v_0 t$, где $p, v_0 \in \mathbb{R}^2$ фиксированы, $|v_0| = 1$.
Имеем $\gamma'' \equiv 0 \implies \kappa \equiv 0$.


$$\gamma(t) = p_0 + v_0 t$$

$$\gamma'' = 0. \Rightarrow k = 0.$$

# Примеры

## Пример (кривизна прямой)

Для прямой натуральная параметризация имеет вид $\gamma(t) = p + v_0 t$, где $p, v_0 \in \mathbb{R}^2$ фиксированы, $|v_0| = 1$. Имеем $\gamma'' \equiv 0 \implies \kappa \equiv 0$.

## Пример (кривизна окружности)

Рассмотрим окружность радиуса $R$ с центром в начале координат. Легко угадать натуральную параметризацию:

$$\boxed{\gamma(t) = \left(R\cos\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R}\right)}$$

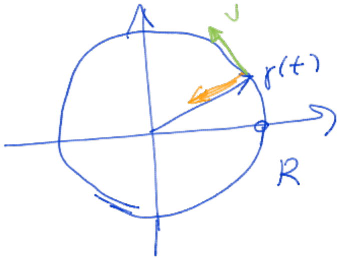
(обход против часовой стрелки). Вычисляем:

$$v(t) = \gamma'(t) = \left(-\sin\frac{t}{R}, \cos\frac{t}{R}\right) \qquad (1)$$

$$n(t) = \left(-\cos\frac{t}{R}, -\sin\frac{t}{R}\right) \qquad (2)$$

$$\gamma''(t) = v'(t) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{t}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{t}{R}\right) = \frac{1}{R}n(t)$$

Отсюда $\kappa(t) = \frac{1}{R}$




$(R\cos t, R\sin t)$

не натуральная

$t \to t/R$

$|v(t)| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2} = 1$

$$\begin{vmatrix} -\sin & -\cos \\ \cos & -\sin \end{vmatrix} = \sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\gamma'' = \frac{1}{R}\cdot n \implies k = \frac{1}{R}$$

$$t \in [0, 2\pi R]$$

# Соприкасающаяся окружность

## Определение

Соприкасающаяся окружность кривой $\gamma$ в точке $t$ — окружность с центром в точке

$$\boxed{c = \gamma(t) + \frac{n(t)}{\kappa(t)}}$$

и радиусом

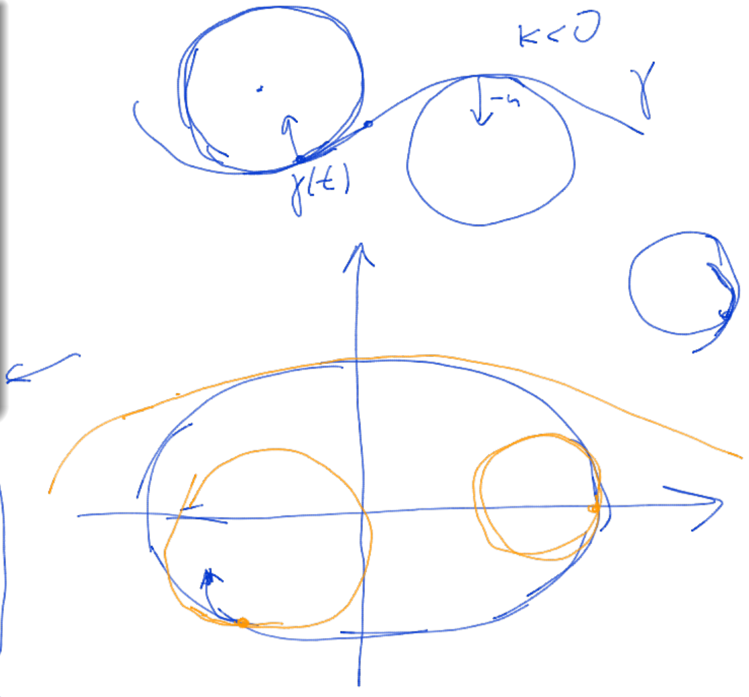
$$\boxed{R = \frac{1}{|\kappa(t)|}}$$

(При $\kappa = 0$ окружность вырождается в прямую.)

Названия: $c$ — центр кривизны, $R$ — радиус кривизны.

Свойства:

- Эта окружность проходит через точку $\gamma(t)$, и при правильном выборе направления обхода имеет в этой точке такую же скорость и кривизну, как $\gamma$.
- Как следствие, $\gamma$ имеет касание второго порядка с этой окружностью. Окружность с таким свойством единственна (упражнение).



# Содержание

# Кривизна не натурально параметризованной кривой

Пусть $\gamma$ — произвольная (не натурально параметризованная) регулярная кривая.

## Определение

Кривизна $\gamma$ в точке $t$ — кривизна её натуральной параметризации в соответствующей точке. $\varphi(t)$

(Аналогично определяется базис Френе и т.д.)

# Кривизна не натурально параметризованной кривой

Пусть $\gamma$ — произвольная (не натурально параметризованная) регулярная кривая.

## Определение

Кривизна $\gamma$ в точке $t$ — кривизна её натуральной параметризации в соответствующей точке.

(Аналогично определяется базис Френе и т.д.)

## Теорема

*Для произвольной регулярной кривой $\gamma$* в $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\kappa = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3},}$$

*где $[,]$ — внешнее произведение векторов (определитель матрицы).*

$\gamma'$, $\gamma''$

$[\gamma', \gamma''] = \begin{vmatrix} \gamma' & \vdots & \gamma'' \end{vmatrix}$

$\boxed{\gamma : I \to \mathbb{R}^n}$

$\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$

$\gamma''(t) \in \mathbb{R}^n.$

$$k_\gamma(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t)]}{|\gamma'(t)|^3}$$

# Доказательство

Пусть $\bar\gamma$ — натуральная параметризация, $\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$, $v(t), n(t)$ — базис Френе $\bar\gamma$ в точке $t$.
Дифференцируем равенство $\gamma(t) = \bar\gamma(\varphi(t))$:

$$\gamma'(t) = \bar\gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \boxed{\varphi' \cdot v} \qquad (1)$$

(в правой части $\varphi' = \varphi'(t)$, $v = v(\varphi(t))$).

$\gamma(t) = \bar\gamma(\varphi(t))$

# Доказательство

Пусть $\bar{\gamma}$ — натуральная параметризация, $\gamma = \bar{\gamma} \circ \varphi$,
$v(t), n(t)$ — базис Френе $\bar{\gamma}$ в точке $t$.
Дифференцируем равенство $\gamma(t) = \bar{\gamma}(\varphi(t))$:

$$\gamma'(t) = \bar{\gamma}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \varphi' \cdot v \qquad (1)$$

(в правой части $\varphi' = \varphi'(t)$, $v = v(\varphi(t))$).

Вторая производная:

$$\gamma''(t) = \bar{\gamma}''(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 + \bar{\gamma}'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \qquad (2)$$
$$= \varphi'^2 \kappa \cdot n + \varphi'' \cdot v$$

$$\left(\bar{\gamma}'(\varphi(t))\right)' =$$
$$= \bar{\gamma}''(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\gamma''(\varphi(t)) = k \cdot n$$
$$n = n(\varphi(t))$$

# Доказательство

Пусть $\bar\gamma$ — натуральная параметризация, $\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$, $v(t), n(t)$ — базис Френе $\bar\gamma$ в точке $t$.
Дифференцируем равенство $\gamma(t) = \bar\gamma(\varphi(t))$:

$$\gamma'(t) = \bar\gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \varphi' \cdot v \qquad (1)$$

(в правой части $\varphi' = \varphi'(t)$, $v = v(\varphi(t))$).

Вторая производная:

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= \bar\gamma''(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 + \bar\gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \qquad (2)\\ &= \varphi'^2\kappa \cdot n + \varphi'' \cdot v\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [\gamma', \gamma''] \overset{\downarrow}{=} [\varphi' \cdot v, \varphi'^2\kappa \cdot n + \varphi'' \cdot v] = \varphi'^3\kappa[v, n] = \boxed{\varphi'^3\kappa,} \qquad (3)$$

Из формулы для первой производной $|\gamma'|^3 = \varphi'^3$

Разделив одно на другое, получаем требуемое.

$$\kappa \overset{?}{=} \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi' = |\gamma'| \\ \text{из } (1)\end{gathered}}$$

$v = (x, y) \qquad x^2 + y^2 = 1$

$n = (-y, x)$

$$[v, n] = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 = 1$$

$[v, n] = [e_1, e_2]$

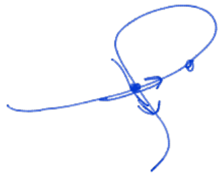
# Содержание

# Формулы Френе

Снова рассматриваем только натурально параметризованные кривые

$v = v(t)$

$n = n(t)$



**Теорема (формулы Френе)**

*Для натурально параметризованной кривой* $\gamma$

$$\begin{cases} v' = \kappa n \\ n' = -\kappa v \end{cases}$$

*($v, n$ — базис Френе, $\kappa$ — кривизна).*

# Формулы Френе

Снова рассматриваем только натурально параметризованные кривые

## Теорема (формулы Френе)

*Для натурально параметризованной кривой* $\gamma$

$$\begin{cases} v' = \kappa n \\ n' = -\kappa v \end{cases}$$

*(*$v, n$ *— базис Френе,* $\kappa$ *— кривизна).*

## Замечание

Метод подвижного репера — раскладывать векторы по переменному базису $v, n$, а если возникает нужда в дифференцировании результата — пользоваться формулами Френе.


$\gamma(t) + \ldots v + \ldots n.$

## Доказательство формул Френе

Первое равенство $v' = \kappa n$ — определение кривизны.
Докажем второе.

Так как $|n| = const$, $n' \perp n \implies n' = \lambda v$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
Коэффициент $\lambda$ равен скалярному произведению $\langle n', v \rangle$.

Продифференцируем тождество $\langle n, v \rangle = 0$:

$$0 = \langle n, v \rangle' = \langle n', v \rangle + \langle n, v' \rangle \qquad (1)$$

Отсюда

$$\langle n', v \rangle = -\langle n, v' \rangle = -\langle n, \kappa n \rangle = -\kappa \qquad (2)$$

ч.т.д. $\square$

$\langle n', n \rangle = 0$

$\|$

$\frac{1}{2} \langle n, n \rangle'$ .

$\langle n', v \rangle = ?$

$\langle n, n \rangle = 1$

$\boxed{v^{\perp} = \text{поворот}(v)}$

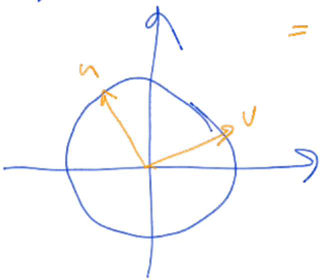
$n = v^{\perp}$

$n' = (v')^{\perp} =$

$= (\kappa n)^{\perp} =$

$= \kappa \cdot n^{\perp} =$

$= v^{\perp\perp} = -v$



# Параллельные кривые

Пусть $\gamma$ — регулярная кривая, $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим кривую

$$\gamma_a(t) = \gamma(t) + an(t),$$

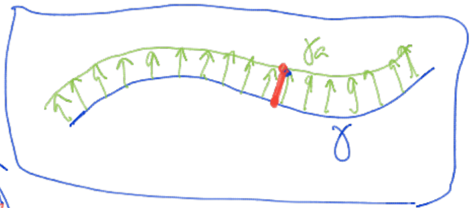
где $n(t)$ — нормаль $\gamma$. Кривая $\gamma_a$ называется параллельной кривой или эквивдистантой для $a$.

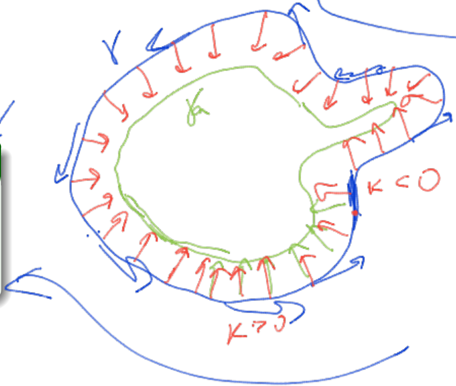
## Задача

Если $\gamma$ определена на отрезке, не имеет самопересечений, и $|a|$ достаточно мало, то расстояния от точки $\gamma_a(t)$ до кривой $\gamma$ равно $|a|$.

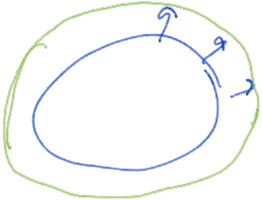
Методом подвижного репера исследуем вопросы про $\gamma_a$:

- регулярность ✓
- длина ✓
- кривизна ✓




$\gamma(t)$ — ближ. точка на кривой $\gamma$ к $\gamma_a(t)$



# Скорость и длина $\gamma_a$

Пусть $\gamma$ натурально параметризована. Из формул Френе

$$\gamma_a' = \gamma' + an' = v - a\kappa v = (1 - a\kappa)v. \qquad (1)$$

Вывод: $\gamma_a$ регулярна, если не достигает никакого центра кривизны $\gamma$. Это верно при достаточно малых $|a|$ или если $a$ и $\kappa$ имеют разные знаки (например, при отступе наружу от выпуклой кривой).

Далее предполагаем, что $a$ таково, что $\boxed{1 - a\kappa > 0}$ при всех $t$. Считаем длину:

$$\ell(\gamma_a) = \int (1 - a\kappa) = \ell(\gamma) - a \int \kappa \qquad (2)$$

(интеграл по области определения $\gamma$).

## Замечание

Если $\gamma$ — простая замкнутая, то интеграл её кривизны равен $\pm 2\pi$ (докажем позже). Тогда $\ell(\gamma_a) = \ell(\gamma) \pm 2\pi a$. Знак $\pm$ зависит от направления обхода.

V

$\gamma_a(t) = \gamma(t) + a \cdot n(t)$

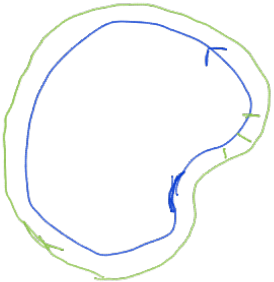
$\gamma' = v$

$n' = -kv$

$\gamma_a$ — регулярна

$\Updownarrow (1)$

$a \neq \dfrac{1}{k(t)} \quad \forall t$



# Кривизна $\gamma_a$

Продолжим дифференцирование:

$$\gamma_a' = \gamma' + an' = v - a\kappa v = \boxed{(1 - a\kappa)v} \qquad (1)$$

$$\gamma_a'' = (1 - a\kappa)'v + (1 - a\kappa)v' = a\kappa' v + \kappa(1 - a\kappa)n \qquad (2)$$

$$K = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3} \qquad (*)$$

$$v' = \kappa n$$

# Кривизна $\gamma_a$

Продолжим дифференцирование:

$$\gamma_a' = \gamma' + an' = v - a\kappa v = (1 - a\kappa)v$$

$$\gamma_a'' = (1 - a\kappa)'v + (1 - a\kappa)v' = a\kappa' v + \kappa(1 - a\kappa)n$$

Подставляем в формулу для кривизны:

$$\kappa_a = \frac{[\gamma_a', \gamma_a'']}{|\gamma_a'|^3} = \frac{\kappa(1 - a\kappa)^2}{(1 - a\kappa)^3} = \frac{\kappa}{1 - a\kappa}$$

$[v, v] = 0.$

$[v, n] = 1$

# Кривизна $\gamma_a$

Продолжим дифференцирование:

$$\gamma_a' = \gamma' + an' = v - a\kappa v = (1 - a\kappa)v$$

$$\gamma_a'' = (1 - a\kappa)'v + (1 - a\kappa)v' = a\kappa' v + \kappa(1 - a\kappa)n$$

Подставляем в формулу для кривизны:

$$\kappa_a = \frac{[\gamma_a', \gamma_a'']}{|\gamma_a'|^3} = \frac{\kappa(1 - a\kappa)^2}{(1 - a\kappa)^3} = \frac{\kappa}{1 - a\kappa}$$

Эквивалентно,

$$\frac{1}{\kappa_a} = \frac{1}{\kappa} - a \qquad (**)$$

Т.е. радиус кривизны изменился на $a$, центр кривизны сохранился.

$$\frac{1 - a\kappa}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} - a$$

# Эволюты и эвольвенты (задачи)

## Определение

Эволюта кривой — кривая, образованная её центрами кривизны.

## Упражнение

Скорость эволюты ортогональна скорости исходной кривой в соответствующей точке.

# Эволюты и эвольвенты (задачи)

### Определение

Эволюта кривой — кривая, образованная её центрами кривизны.

### Упражнение

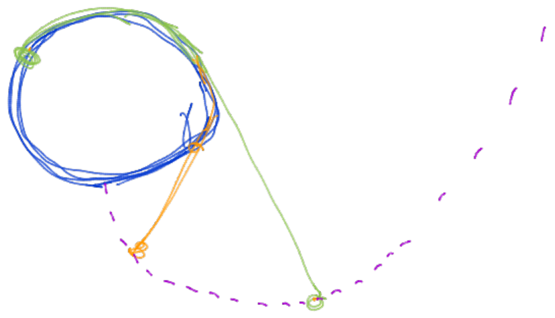
Скорость эволюты ортогональна скорости исходной кривой в соответствующей точке.

### Определение (упражнение)

Эвольвента кривой $\gamma$ — кривая, образованная концом нити, наматываемой на $\gamma$.

### Упражнение

Эволюта эвольвенты — исходная кривая.



# Для записей