Содержание

Направляющая идея

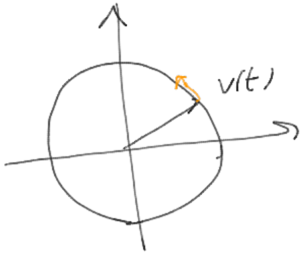
Неформальное описание сути дела:

Рассматриваем натурально параметризованную кривую γ на плоскости.

Её кривизна — скорость движения вектора скорости $v(t)$ по окружности.

Зная кривизну в каждый момент времени, можно найти, насколько вектор скорости изменился по сравнению с начальным положением.

Эта информация позволяет восстановить кривую, если известна её кривизна и начальные данные.



Содержание

Определение поворота

Определение

Поворот натурально параметризованной кривой $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — это

$$\int_a^b \kappa(t)\, dt,$$

где κ — кривизна этой кривой.

Определение поворота

Определение

Поворот натурально параметризованной кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — это

$$\int_a^b \kappa(t)\,dt,$$

где κ — кривизна этой кривой.

Замечание

Для не натурально параметризованной кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ поворот можно найти по формуле

$$\int_a^b \kappa(t)\boxed{|\gamma'(t)|\,dt}$$

Краткая запись (интеграл по длине): $\boxed{\displaystyle\int_a^b \kappa\,d\underline{\ell}.}$

$$\boxed{d\ell = |\gamma'|\cdot dt}$$

$\gamma(t)$ - не натуральна

$\bar\gamma$ - натур. парам

$\gamma = \bar\gamma \circ \varphi \quad | \quad \gamma(t) = \bar\gamma(\varphi(t))$

$\gamma'(t) = \bar\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

$\varphi' = |\gamma'|.$ $\quad \boxed{\varphi' > 0}$

$$\int \kappa(t)\cdot\varphi'(t)\,dt =$$
$$= \int \bar\kappa(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt =$$
$$= \int \bar\kappa(x)\,dx \text{ — поворот.}$$

Напоминание: непрерывный аргумент

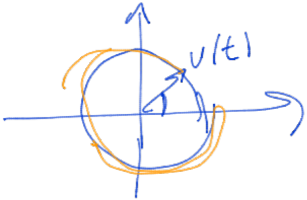
Напоминание

Непрерывный аргумент функции $v\colon [a,b] \to \mathbb{S}^1$ — такая непрерывная функция $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, что

$$v(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$$

для всех $t \in [a,b]$.

Непрерывный аргумент существует у любой непрерывной функции $v\colon [a,b] \to \mathbb{S}^1$.
Он единственен с точностью до константы, кратной 2π.



Поднятие в накр.

$p\colon \mathbb{R} \to S^1$

$p(x) = (\cos x, \sin x)$.

Поворот и непрерывный аргумент скорости

$v : [a, b] \to S^1$

Теорема

Пусть $v(t)$ *— скорость натурально параметризованной кривой* γ, $\alpha(t)$ *— непрерывный аргумент для* $v(t)$. *Тогда*

1. $\alpha(t)$ *— гладкая функция от* t;
2. $\alpha'(t) = \kappa(t)$, *где* κ *— кривизна* γ.

Поворот и непрерывный аргумент скорости

Теорема

Пусть $v(t)$ — скорость натурально параметризованной кривой γ, $\alpha(t)$ — непрерывный аргумент для $v(t)$. Тогда

1. $\alpha(t)$ *— гладкая функция от* t;
2. $\alpha'(t) = \kappa(t)$, *где* κ *— кривизна* γ.

Следствие

Поворот кривой $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *равен изменению аргумента вектора* $\gamma'(t)$ *от* $t = a$ *до* $t = b$.

Поворот и непрерывный аргумент скорости

Теорема

Пусть $v(t)$ — скорость натурально параметризованной кривой γ, $\alpha(t)$ — непрерывный аргумент для $v(t)$. Тогда

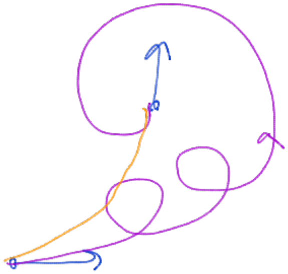
1. $\alpha(t)$ *— гладкая функция от* t;
2. $\alpha'(t) = \kappa(t)$, *где* κ *— кривизна* γ.

Следствие

Поворот кривой $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *равен изменению аргумента вектора* $\gamma'(t)$ *от* $t = a$ *до* $t = b$.

Следствие

Векторы $\gamma'(a)$ *и* $\gamma'(b)$ *определяют поворот кривой* γ *с точностью до прибавления* $2\pi m$, *где* $m \in \mathbb{Z}$.



поворот $= \pi/2$

поворот $= 6\pi + \pi/2$ (?)

Доказательство теоремы

1. В окрестности любого t аргумент записывается формулой с arcsin или arccos.

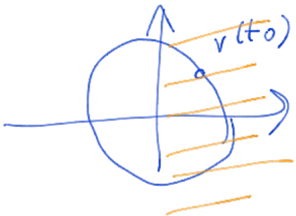
Например, если $v(t) = (x(t), y(t))$ и $x(t_0) > 0$ то в окрестности t_0 непрерывный аргумент имеет вид $\alpha(t) = \arcsin y(t) + 2\pi m$.
Другие случаи аналогичны.

$v(t) = (x(t), y(t))$, $x, y \in C^\infty$

$x(t) = \cos\alpha(t)$

$y(t) = \sin\alpha(t)$

Надо, $\alpha \in C^\infty$



Доказательство теоремы

$v = v(t)$

$\alpha = \alpha(t)$

1. В окрестности любого t аргумент записывается формулой с arcsin или arccos.

Например, если $v(t) = (x(t), y(t))$ и $x(t_0) > 0$ то в окрестности t_0 непрерывный аргумент имеет вид $\alpha(t) = \arcsin y(t) + 2\pi m$.
Другие случаи аналогичны.

2.

$$v = (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad (1)$$

$$v' = \alpha' \cdot (-\sin\alpha, \cos\alpha) \qquad (2)$$ — производная композиции

$$n = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \qquad (3)$$

$v' = \alpha' \cdot n$ из (2) и (3)

$\boxed{v' = \kappa n}$ (из формул Френе) $\implies \kappa = \alpha'$. □

Содержание

Формулировка

Теорема

Для любой гладкой функции $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ *существует регулярная натурально параметризованная кривая* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$*, у которой кривизна равна этой функции.*

Такая кривая единственна с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.

$I \subset \mathbb{R}$ - интервал

Формулировка

Теорема

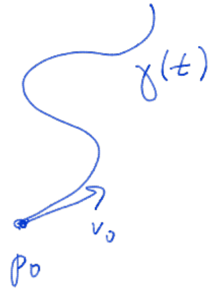
Для любой гладкой функции $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ *существует регулярная натурально параметризованная кривая* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$*, у которой кривизна равна этой функции.*

Такая кривая единственна с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.

Теорема (уточнение)

Пусть $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ *— гладкая функция,*
$t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in \mathbb{S}^1$.
Тогда существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ *такая, что*

- $\gamma(t_0) = p_0$
- $\gamma'(t_0) = v_0$
- $\kappa_\gamma(t) = \kappa(t)$ *для всех* $t \in I$.

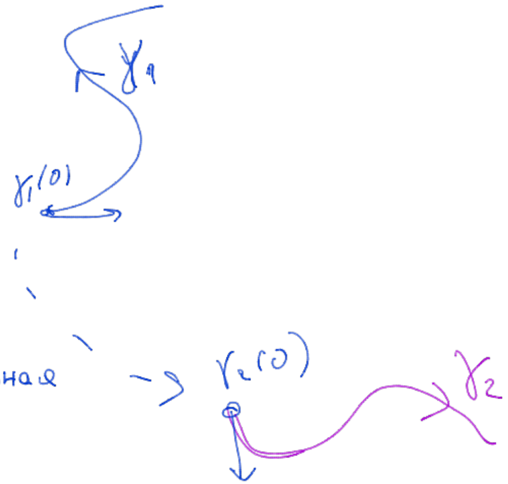


Доказательство – 1: из второй теоремы следует первая

$T2 \Rightarrow T1$

Выведем первую теорему из второй.
Существование очевидно.

Единственность с точностью до движения, сохраняющего ориентацию:
Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованые кривые, и их кривизна — одна и та же функция $\kappa(t)$.



Зафиксируем $t_0 \in I$.
Существует сохраняющее ориентацию движение $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такое, что

$$\begin{cases} F(\gamma_1(t_0)) = \gamma_2(t_0) \\ \vec{F}(\gamma_1'(t_0)) = \gamma_2'(t_0) \end{cases}$$

$\vec{F}$ - линейная часть

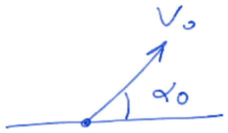
Рассмотрим $\gamma = F \circ \gamma_1$. Она имеет ту же кривизну и те же начальные данные, что γ_2. Значит, $\gamma_2 = F \circ \gamma_1$. $\square$

по второй теореме.

$\square$

Доказательство – 2: единственность

Пусть γ удовлетворяет условиям $\gamma(t_0) = p_0$, $\gamma'(t_0) = v_0$, $\kappa_\gamma(t) = \kappa(t)$ при всех $t \in I$).
Пусть $v(t) = \gamma'(t)$, $\alpha(t)$ — непрерывный аргумент $v(t)$, $\alpha_0 = \alpha(t_0)$.



$\kappa(t)$

Тогда по предыдущей теореме $\alpha'(t) = \kappa(t)$
$\implies$ $\alpha(t)$ определено однозначно:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa \qquad (1)$$

$\implies$ $v(t)$ определено однозначно:

$$v(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t)) \qquad (2)$$

$\implies$ $\gamma(t)$ определено однозначно:

$$\gamma(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} v \qquad (3)$$

Доказательство – 3: существование

Для построения кривой используем формулы из доказательства единственности:

- Выберем α_0 так, что $v_0 = (\cos\alpha_0, \sin\alpha_0)$. (1)
- Положим $\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa$. (2)
- Положим $v(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$ (3)
- Положим $\gamma(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} v$. (4)

Кривая γ подходит: $\gamma(t_0) = p_0$,

$$\gamma'(t) = v(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$$

$|\gamma'| = 1$

$\implies$ γ натурально параметризована, $\gamma'(t_0) = v_0$.

$$\gamma'' = \alpha' n_\gamma = \kappa n_\gamma$$

$\implies$ $\kappa_\gamma \equiv \kappa$.

Теорема доказана

$p_0,\ v_0,\ \kappa(t) \in C^\infty$

$\Downarrow$

α_0

$\Downarrow$

$\alpha(t) = \alpha_0 + \int \kappa$

$\Downarrow$

$v(t) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\Downarrow$

$\gamma(t) = p_0 + \int v.$

$$\gamma'' = v' = \alpha' \cdot \underbrace{(-\sin\alpha, \cos\alpha)}_{\shortparallel \atop n} = \alpha' \cdot n.$$

Содержание

Замкнутые кривые

Определение

Кривая $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая, если ее можно продолжить до гладкой $(b-a)$-периодической функции $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

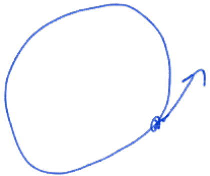
Следствие (из теоремы про поворот и аргумент)

Поворот замкнутой кривой равен $2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$t \in [0, 2\pi]$.

окружность



Поворот $= 2\pi$

Замкнутые кривые

Определение

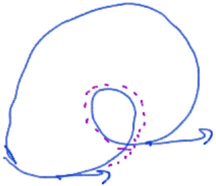
Кривая $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая, если ее можно продолжить до гладкой $(b - a)$-периодической функции $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Следствие (из теоремы про поворот и аргумент)

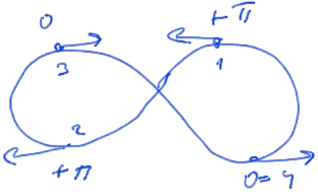
Поворот замкнутой кривой равен $2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Определение

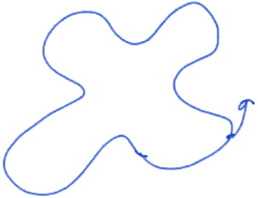
Число m из последнего следствия называется числом вращения данной кривой.
(Замечание: это индекс $v(t)$ относительно 0.)



число вращения
$= 2$



число вр.-я
$= 0.$



число вр-я
$= \pm 1$

Поворот простой замкнутой кривой

Определение

Простая замкнутая кривая — замкнутая кривая $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ у которой нет самопересечений, т.е. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для любых различных t_1, t_2, кроме концов.

Поворот простой замкнутой кривой

Определение

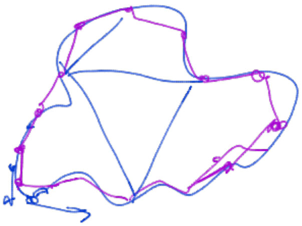
Простая замкнутая кривая — замкнутая кривая $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ у которой нет самопересечений, т.е. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для любых различных t_1, t_2, кроме концов.

Теорема

Поворот простой замкнутой кривой равен $\pm 2\pi$.

Замечание

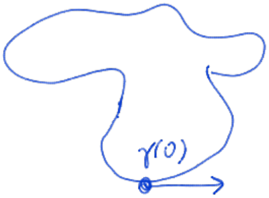
Знак $\pm$ зависит от направления обхода.



Доказательство — 1: подготовка

Пусть γ — данная кривая. Параметризуем её натурально отрезком $[0, L]$, где $L = \ell(\gamma)$, так, что $\gamma(0)$ — самая нижняя точка кривой (минимум y-координаты). Это можно сделать, так как кривая замкнутая.

$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$



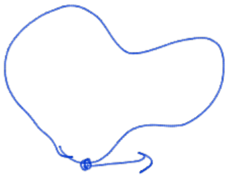
Доказательство — 1: подготовка

Пусть γ — данная кривая. Параметризуем её натурально отрезком $[0, L]$, где $L = \ell(\gamma)$, так, что $\gamma(0)$ — самая нижняя точка кривой (минимум y-координаты). Это можно сделать, так как кривая замкнутая.

Касательная в нижней точке горизонтальна: $\gamma'(0) = (\pm 1, 0)$.

Если $\gamma'(0) = (-1, 0)$, поменяем направление обхода заменой $t \mapsto L - t$. При этот поворот меняет знак.

Теперь $\gamma'(0) = (1, 0)$.
Докажем, что поворот γ равен 2π.



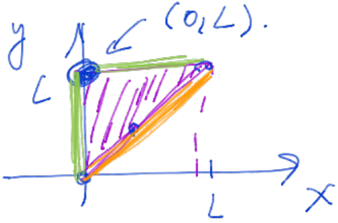
$\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$y(0) = \min y(t)$

Доказательство — 2

Пусть T — треугольник на координатной плоскости, заданный равенством

$$T = \{(x, y) : x, y \in [0, L], x \geq y\}. \qquad (1)$$



Определим $F\colon T \to \mathbb{S}^1$:

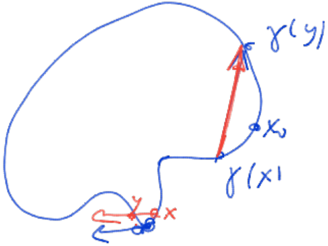
$$F(x, y) = \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{|\gamma(y) - \gamma(x)|} \qquad (2)$$

Определено, т.к. нет самопересеч. (кроме $x=y$ и $x=0, y=L$).

при $\gamma(x) \neq \gamma(y)$,

$$\underline{F(x, x) = \gamma'(x)} \qquad (3)$$

$$\underline{F(0, L) = (-1, 0)} \qquad (4)$$



$x, y \to x_0.$

$\gamma(y) - \gamma(x) \sim \gamma'(x_0) \cdot (y - x)$

$F(x, y) \to \gamma'(x_0)$

Отображение F непрерывно.

Заметим, что $F(0, 0) = F(L, L) = (1, 0)$.

Доказательство — 3

F непрерывно, T односвязно $\implies$ существует непрерывный аргумент $A\colon T \to \mathbb{R}$, т.е.

$$F(x,y) = (\cos A(x,y), \sin A(x,y))$$

(поднятие для стандартного накрытия $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$).

$F: T \to S^1$

$p: \mathbb{R} \to S^1$ $(\cos, \sin)$

$\exists A: T \to \mathbb{R}$

т.ч. $p \circ A = F$

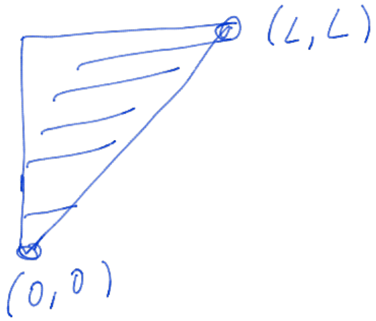
Доказательство — 3

F непрерывно, T односвязно $\implies$ существует непрерывный аргумент $A\colon T \to \mathbb{R}$, т.е.

$$F(x, y) = (\cos A(x, y), \sin A(x, y))$$

(поднятие для стандартного накрытия $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$).

Поворот γ равен изменению аргумента $\gamma'(t)$, $t \in [0, L]$
$\implies$ он равен изменению функции $A(x, x)$, $x \in [0, L]$
$\implies$ он равен $A(L, L) - A(0, 0)$. = поворот.



Доказательство — 3

F непрерывно, T односвязно $\implies$ существует непрерывный аргумент $A\colon T \to \mathbb{R}$, т.е.

$$F(x,y) = (\cos A(x,y), \sin A(x,y)) \qquad (1)$$

(поднятие для стандартного накрытия $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$).

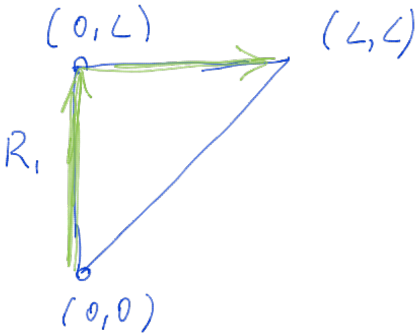
Поворот γ равен изменению аргумента $\gamma'(t)$, $t \in [0, L]$
$\implies$ он равен изменению функции $A(x,x)$, $x \in [0, L]$
$\implies$ он равен $A(L,L) - A(0,0)$.

Разложим его в сумму $R_1 + R_2$, где

$$R_1 = A(0,L) - A(0,0) \qquad (2)$$

$$R_2 = A(L,L) - A(0,L) \qquad (3)$$

Докажем, что $R_1 = R_2 = \pi$.

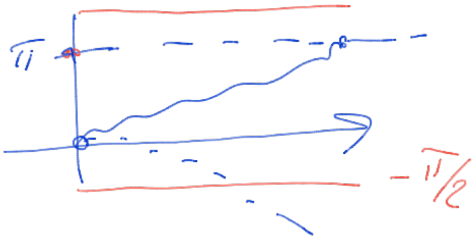


Доказательство — 4

Можно считать, что $A(0,0) = 0$.
Рассмотрим $R_1 = A(0,L) - A(0,0) = A(0,L)$.
Оно равно изменению аргумента

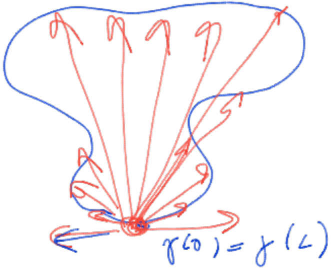
$$w_1(t) := F(0,t) = \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{|\gamma(t) - \gamma(0)|}, \qquad t \in [0, L]$$

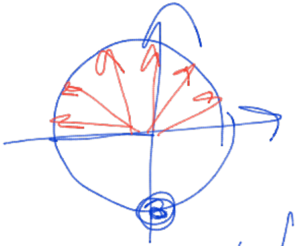
Значения $w_1(t)$ направлены в верхнюю полуплоскость $\implies$ аргумент не принимает значений $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ $\implies$ он изменяется от 0 до π $\implies$ $R_1 = \pi$.



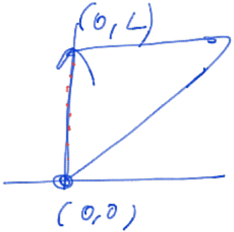
$A(0,L) = \pi + 2\pi m \implies m = 0$

$F(0,L) = (-1, 0)$
$\mathrm{Arg}(-1,0) = \pi + 2\pi m$





$A(0,t) \neq \begin{cases} -\pi/2 \\ 2\pi - \pi/2 \end{cases}$



Доказательство — 4

Можно считать, что $A(0,0) = 0$.
Рассмотрим $R_1 = A(0,L) - A(0,0) = A(0,L)$.
Оно равно изменению аргумента

$$w_1(t) := F(0,t) = \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{|\gamma(t) - \gamma(0)|}, \qquad t \in [0, L]$$

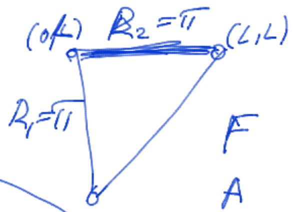
Значения $w_1(t)$ направлены в верхнюю полуплоскость $\implies$ аргумент не принимает значений $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi \implies$ он изменяется от 0 до $\pi \implies R_1 = \pi$.

Аналогично, R_2 — изменение аргумента

$$w_2(t) := F(t,L) = \frac{\gamma(t) - \gamma(L)}{|\gamma(t) - \gamma(L)|}, \qquad t \in [0, L]$$

Значения $w_2(t)$ направлены в нижнюю полуплоскость $\implies$ аргумент не принимает значений $\frac{\pi}{2}$ и $2\pi + \frac{\pi}{2} \implies$ он изменяется от π до $2\pi \implies R_2 = \pi \implies$ поворот равен 2π.

Теорема доказана

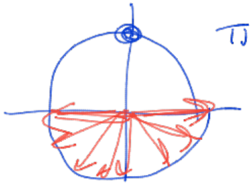


F $(-1,0) \rightsquigarrow (1,0)$

A $\pi \rightsquigarrow 2\pi m$

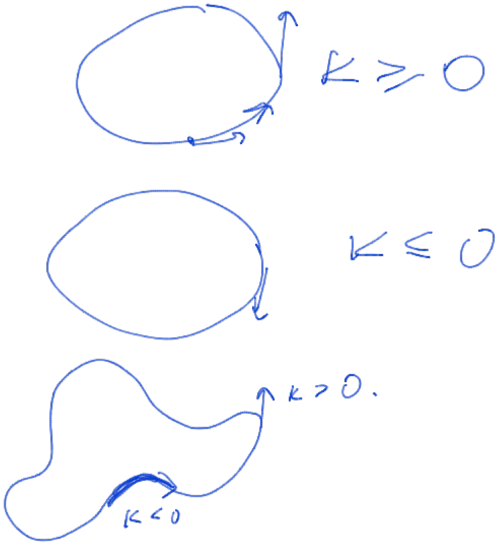
$m \geq 2$ $\Downarrow$ $\exists$ значение $2\pi + \pi/2$

$m \leq 0$ $\Downarrow$ $\exists$ значение $\pi/2$



$\pi \rightsquigarrow 2\pi$

Содержание



Содержание

Два определения выпуклости

Будем рассматривать простые замкнутые регулярные кривые на плоскости.

Образ кривой γ обозначаем той же буквой γ.

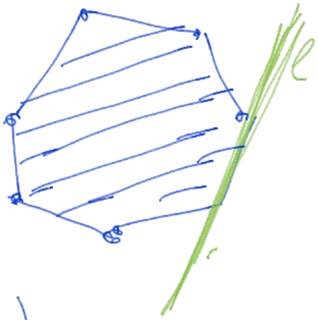
Теорема

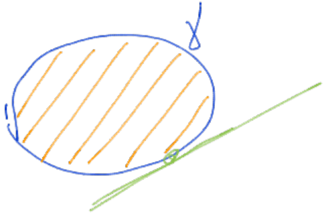
Пусть γ — простая замкнутая регулярная кривая на плоскости. Тогда два условия эквивалентны:

1. *γ — граница выпуклого компакта.* (с непустой внутр.).
2. *γ лежит по одну сторону от любой своей касательной.*

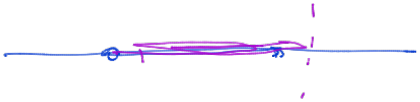
Определение

Кривые, удовлетворяющие этим условиям, будем называть выпуклыми.



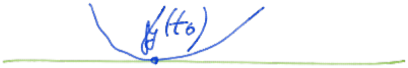


В (1) компакт $\simeq D^2$.



Доказательство

$1 \implies 2$: Пусть γ — граница выпуклого тела K. Из свойств выпуклых множеств, для любого t существует опорная прямая для K в точке $\gamma(t)$. V
Кривая лежит по одну сторону от этой прямой (по определению опорной прямой) $\implies$ это касательная.



$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\ell = Ox$

$y(t_0) = \min y(t)$

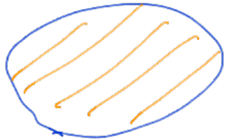
$y'(t_0) = 0$.

$\gamma'(t_0)$ — горизонтальна.

Доказательство

$1 \implies 2$: Пусть γ — граница выпуклого тела K.
Из свойств выпуклых множеств, для любого t существует опорная прямая для K в точке $\gamma(t)$. Кривая лежит по одну сторону от этой прямой (по определению опорной прямой) $\implies$ это касательная.

$2 \implies 1$: Пусть γ лежит по одну сторону от любой своей касательной. Определим $K = \mathrm{conv}(\gamma)$.
K — выпуклый компакт (как выпуклая оболочка компакта) с непустой внутренностью (так как γ не лежит на одной прямой)
$\implies$ K гомеоморфно D^2, а его граница ∂K гомеоморфна $\mathbb{S}^1$.



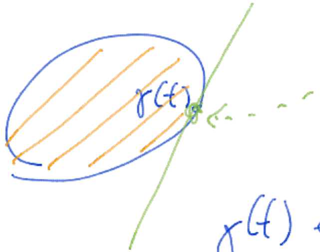
$\partial K = Fr(K)$
$\simeq S^1$

Доказательство

1 $\implies$ 2: Пусть γ — граница выпуклого тела K. Из свойств выпуклых множеств, для любого t существует опорная прямая для K в точке $\gamma(t)$. Кривая лежит по одну сторону от этой прямой (по определению опорной прямой) $\implies$ это касательная.

2 $\implies$ 1: Пусть γ лежит по одну сторону от любой своей касательной. Определим $K = \mathrm{conv}(\gamma)$. K — выпуклый компакт (как выпуклая оболочка компакта) с непустой внутренностью (так как γ не лежит на одной прямой) $\implies$ K гомеоморфно D^2, а его граница ∂K гомеоморфна $\mathbb{S}^1$.

γ лежит по одну сторону от касательной в точке $\gamma(t)$ $\implies$ $\gamma(t)$ — не внутренняя точка K. $\implies$ $\gamma \subset \partial K$.



$\gamma(t) \notin \mathrm{Int}(K)$

$\gamma(t) \in \partial K$

$\Downarrow$

$\gamma \subset \partial K$

Доказательство

1 $\implies$ 2: Пусть γ — граница выпуклого тела K.
Из свойств выпуклых множеств, для любого t существует опорная прямая для K в точке $\gamma(t)$.
Кривая лежит по одну сторону от этой прямой (по определению опорной прямой) $\implies$ это касательная.

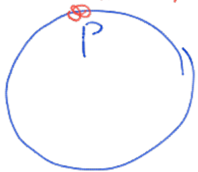
2 $\implies$ 1: Пусть γ лежит по одну сторону от любой своей касательной. Определим $K = \text{conv}(\gamma)$.
K — выпуклый компакт (как выпуклая оболочка компакта) с непустой внутренностью (так как γ не лежит на одной прямой)
$\implies$ K гомеоморфно D^2, а его граница ∂K гомеоморфна $\mathbb{S}^1$.

γ лежит по одну сторону от касательной в точке $\gamma(t)$
$\implies$ $\gamma(t)$ — не внутренняя точка K.
$\implies$ $\gamma \subset \partial K$.

Так как γ и ∂K оба гомеоморфны окружности, из включения $\gamma \subset \partial K$ следует, что $\gamma = \partial K$. $\square$

$$\begin{cases} \partial K \simeq S^1 \\ \gamma \simeq S^1 \\ \gamma \subset \partial K \end{cases}$$

$\notin \gamma$



$\gamma \simeq$ (подмн-во $\underset{\cong \, \mathbb{R}}{S^1 \setminus \{p\}}$)

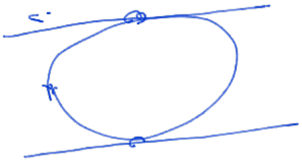
Содержание

Формулировка

Теорема

Пусть γ — простая замкнутая регулярная кривая. Тогда эквивалентны три условия:

1. *γ — выпуклая кривая (лежит по одну сторону от любой своей касательной).*
2. *κ_γ имеет нестрого постоянный знак (или всюду ≥ 0, или всюду ≤ 0).*
3. *Для любой прямой ℓ существуют ровно две касательные к γ, параллельные ℓ.*

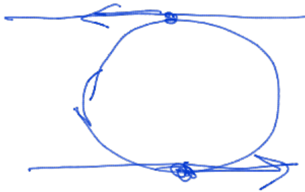


Формулировка

Теорема

Пусть γ — простая замкнутая регулярная кривая. Тогда эквивалентны три условия:

1. *γ — выпуклая кривая (лежит по одну сторону от любой своей касательной).*
2. *κ_γ имеет нестрого постоянный знак (или всюду ≥ 0, или всюду ≤ 0).*
3. *Для любой прямой ℓ существуют ровно две касательные к γ, параллельные ℓ.*



Замечание

Две касательные в последнем пункте имеют противоположные направления, т.е. для каждого ориентированного направления касательная единственна. Это будет видно из доказательства.

Доказательство 1 $\implies$ 2

Пусть γ лежит слева от своей ориентированной касательной в точке t_0. Выберем такую систему координат, что эта касательная — первая координатная ось. Тогда $\gamma'(t_0) = (1, 0)$, $\gamma''(0)$ имеет неотрицательную y-координату $\implies$ $\kappa_\gamma(t_0) \geq 0$.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$y(t_0) = \min y(t)$$

$$\begin{cases} y'(t) = 0 \\ y''(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma'' = (x'', y'') = k \cdot n$$

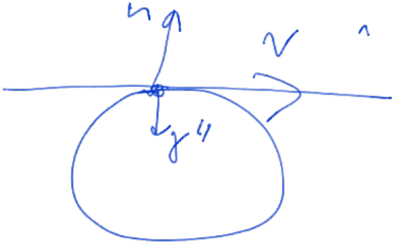
$$n = (0, 1)$$

$$\Rightarrow k(t_0) \geq 0$$

Пусть γ лежит слева от своей ориентированной касательной в точке t_0. Выберем такую систему координат, что эта касательная — первая координатная ось. Тогда $\gamma'(t_0) = (1, 0)$, $\gamma''(0)$ имеет неотрицательную y-координату $\implies$ $\kappa_\gamma(t_0) \geq 0$.

Аналогично, если γ лежит справа от своей ориентированной касательной в точке t_0, то $\kappa_\gamma(t_0) \leq 0$.

Осталось понять, почему γ не может лежать то слева, то справа от касательных. Определим $\sigma(t) = 1$, если γ лежит слева от касательной в точке t, и $\sigma(t) = -1$, если справа. Докажем, что $\sigma(t)$ локально постоянна, тогда из связности отрезка последует, что она постоянна.



$$\sigma(t) = \begin{cases} +1, & \text{если } \gamma \text{ слева от кас.} \\ -1, & \text{если справа.} \end{cases}$$

Доказательство 1 $\implies$ 2

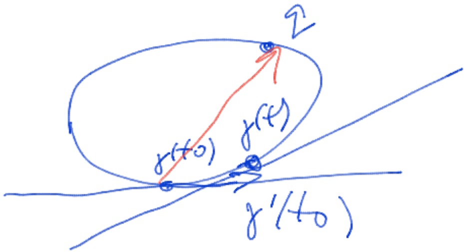
Пусть γ лежит слева от своей ориентированной касательной в точке t_0. Выберем такую систему координат, что эта касательная — первая координатная ось. Тогда $\gamma'(t_0) = (1, 0)$, $\gamma''(0)$ имеет неотрицательную y-координату $\implies$ $\kappa_\gamma(t_0) \geq 0$.

Аналогично, если γ лежит справа от своей ориентированной касательной в точке t_0, то $\kappa_\gamma(t_0) \leq 0$.

Осталось понять, почему γ не может лежать то слева, то справа от касательных. Определим $\sigma(t) = 1$, если γ лежит слева от касательной в точке t, и $\sigma(t) = -1$, если справа. Докажем, что $\sigma(t)$ локально постоянна, тогда из связности отрезка последует, что она постоянна.

Если $\sigma(t_0) = 1$, то найдётся $\hat{t}$ такое, что $q := \gamma(\hat{t})$ строго левее касательной. Это значит, что $[\gamma'(t_0), q - \gamma(t_0)] > 0$ $\implies$ по непрерывности $[\gamma'(t), q - \gamma(t)] > 0$ для всех t, достаточно близких к t_0 $\implies$ $\cancel{\varepsilon(t) > 0}$ для этих t. □

$\sigma(t) = 1$.



$[\gamma'(t_0), q - \gamma(t_0)] > 0$

для $t \approx t_0$

$[\gamma'(t), q - \gamma(t)] > 0$

Доказательство 2 $\implies$ 3

Пусть $\kappa = \kappa_\gamma \geq 0$ (иначе поменяем направление обхода). Пусть γ натурально параметризована отрезком $[0, L]$. Пусть $\alpha(t)$ — непрерывный аргумент $v(t)$. Можно считать, что $\alpha(0) = 0$.

$\alpha' = \kappa$ и $\int \kappa = 2\pi$

$\implies$ α изменяется монотонно от 0 до 2π.

$\implies$ α принимает каждое значение $\alpha_0 \in (0, \pi)$ либо в одной точке, либо на интервале

$\implies$ все касательные ориентированного направления с аргументов α_0 совпадают

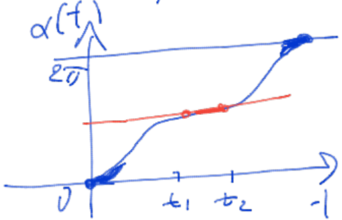
$\implies$ есть ровно одна касательная каждого ориентированного направления (кроме, может быть, случая $\alpha_0 = 0$).

Случай α_0 можно свести к разобранному заменой начальной точки. $\square$

$\alpha(0) = 0.$

1. $\alpha' = \kappa$
2. $\int \kappa = 2\pi.$

$\alpha \nearrow$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(L)=2\pi$



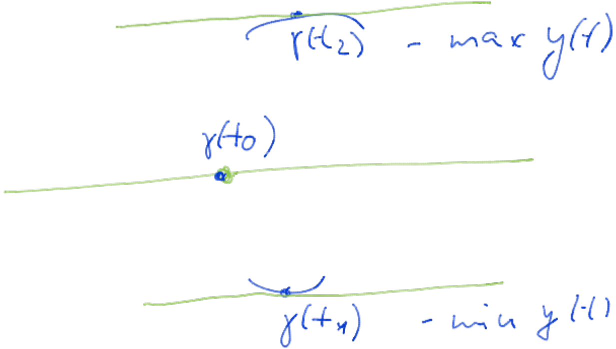
Доказательство $3 \implies 1$

От противного: пусть у кривой γ ровно две касательные каждого направления, но она не выпукла.

Тогда существует такая касательная ℓ, что на γ есть точки по обе стороны от ℓ.

Выберем координаты так, что ℓ — горизонтальная ось. Тогда есть 3 различные горизонтальные касательные: ℓ, касательная в самой нижней точке и касательная в самой верхней точке. $\square$

Теорема доказана



Содержание

Содержание

Определение

Определение

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — натурально параметризованная регулярная кривая, $t \in I$.
Вектор $\gamma''(t)$ — вектор кривизны γ в точке t.
Его длина $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$ — кривизна.
Его направление $n_\gamma(t) := \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$ — главная нормаль (далее — просто нормаль).
Плоскость, порожденная векторами $\gamma'(t)$ и $\gamma''(t)$ — соприкасающаяся плоскость.

$k = |\gamma''|. \geq 0.$

$\gamma'' \perp \gamma$

$|v| = |n| = 1$

$\langle v, n \rangle = 0.$

$\boxed{v' = kn}$

Комментарии

- $v = \gamma'(t)$ и $n = n_\gamma(t)$ — ортонормированная пара
- Верно равенство $v' = \gamma'' = \kappa n$
- В точках, где $\kappa(t) = 0$, нормаль не определена, κ теряет гладкость. Но равенство $\gamma'' = v' = \kappa n$ верно при любом выборе вектора n.
- Кривизна сохраняется при движениях.

Не натуральные параметризации

Для не натурально параметризованной кривой кривизна и т.д. определяются как кривизна натуральной параметризации в соответствующей точке.

Не натуральные параметризации

Для не натурально параметризованной кривой кривизна и т.д. определяются как кривизна натуральной параметризации в соответствующей точке.

Разложение ускорения на касательную и нормальную компоненты и следствия:

- Если $s(t) = |\gamma'(t)|$, то

$$\gamma' = sv \qquad (1)$$
$$\gamma'' = s'v + s^2\kappa n \qquad (2)$$

где v и n — скорость и нормаль для натуральной параметризации.

$\bar\gamma$ — натур. пар.

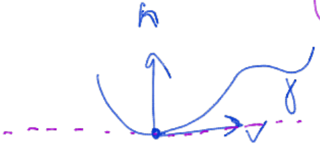
$\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$.

$s(t) = \varphi'(t) = |\gamma'(t)|$.

(1) $\gamma'(t) = \underbrace{\bar\gamma'(\varphi(t))}_{\text{единичный}} \cdot \varphi'(t)$

κn

(2) $\gamma''(t) = \underbrace{\bar\gamma''(\varphi(t))}_{\kappa n} \cdot \underbrace{\varphi'(t)^2}_{s^2} + \underbrace{\bar\gamma'(\varphi(t))}_{v} \cdot \underbrace{\varphi''(t)}_{s'}$.



Не натуральные параметризации

Для не натурально параметризованной кривой кривизна и т.д. определяются как кривизна натуральной параметризации в соответствующей точке.

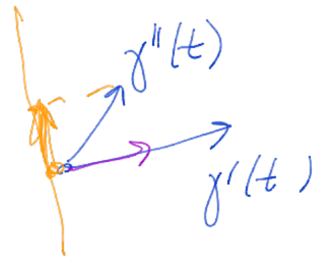
Разложение ускорения на касательную и нормальную компоненты и следствия:

- Если $s(t) = |\gamma'(t)|$, то

$$\gamma' = sv$$
$$\gamma'' = s'v + s^2\kappa n$$

  где v и n — скорость и нормаль для натуральной параметризации.

- При $\kappa \neq 0$, векторы v, n получается ортогонализацией из векторов γ' и γ''.



Не натуральные параметризации

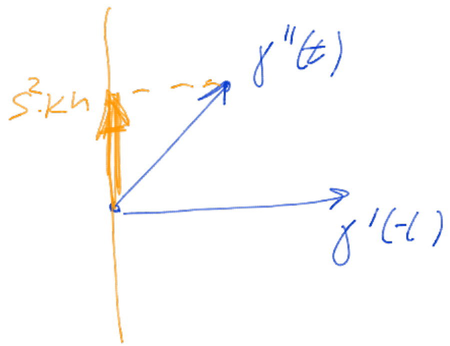
Для не натурально параметризованной кривой кривизна и т.д. определяются как кривизна натуральной параметризации в соответствующей точке.

Разложение ускорения на касательную и нормальную компоненты и следствия:

- Если $s(t) = |\gamma'(t)|$, то

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma' &= sv\\ \gamma'' &= s'v + s^2\kappa n\end{aligned}}$$

  где v и n — скорость и нормаль для натуральной параметризации.
- При $\kappa \neq 0$, векторы v, n получается ортогонализацией из векторов γ' и γ''.
- Вектор кривизны $= \dfrac{\mathrm{Pr}_{v^\perp}(\gamma'')}{|\gamma'|^2}$



Не натуральные параметризации

Для не натурально параметризованной кривой кривизна и т.д. определяются как кривизна натуральной параметризации в соответствующей точке.

Разложение ускорения на касательную и нормальную компоненты и следствия:

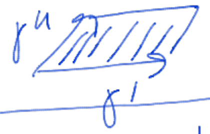
- Если $s(t) = |\gamma'(t)|$, то

$$\gamma' = sv$$
$$\gamma'' = s'v + s^2\kappa n$$

  где v и n — скорость и нормаль для натуральной параметризации.
- При $\kappa \neq 0$, векторы v, n получается ортогонализацией из векторов γ' и γ''.
- Вектор кривизны $= \dfrac{\mathrm{Pr}_{v^\perp}(\gamma'')}{|\gamma'|^2}$
- $\kappa = \dfrac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3}$, где $|\gamma' \wedge \gamma''|$ — площадь параллелограмма на данных векторах.

$$K = \frac{|\gamma'\wedge\gamma''|}{|\gamma'|^3}$$

$|\gamma'\wedge\gamma''|$ — площадь пар-ма



$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} |\gamma'|^2 & \langle\gamma',\gamma''\rangle \\ \langle\gamma',\gamma''\rangle & |\gamma''|^2 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{|\gamma'|^2|\gamma''|^2 - \langle\gamma',\gamma''\rangle^2}$$

Для записей

Поворот

Определение

Поворот регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$ — интеграл кривизны по натуральному параметру.

Для не натурально параметризованной кривой γ, поворот равен $\int \kappa \, d\ell = \int \kappa_\gamma(t) \, |\gamma'(t)| \, dt$

Поворот

Определение

Поворот регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$ — интеграл кривизны по натуральному параметру.

Для не натурально параметризованной кривой γ, поворот равен $\int \kappa \, d\ell = \int \kappa_\gamma(t) \, |\gamma'(t)| \, dt$

Свойство

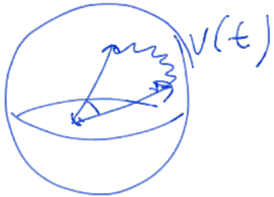
Для кривой $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\angle(\gamma'(a), \gamma'(b)) \le \int_a^b \kappa \, d\ell$$

$V = \gamma' : [a, b] \to S^{n-1}$

$K = |V'|$ -

V – кривая на сфере.



Поворот

Определение

Поворот регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$ — интеграл кривизны по натуральному параметру.

Для не натурально параметризованной кривой γ, поворот равен $\int \kappa\, d\ell = \int \kappa_\gamma(t)\,|\gamma'(t)|\,dt$

Свойство

Для кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\angle(\gamma'(a),\gamma'(b)) \le \int_a^b \kappa\, d\ell$$

Доказательство.

Поворот γ — длина кривой $v(t) = \gamma'(t)$ на сфере. Её длина не меньше углового расстояния между концами. □

V

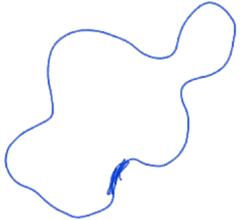
Теорема Фенхеля

Как и в $\mathbb{R}^2$, поворот кривой в $\mathbb{R}^n$ — интеграл кривизны по натуральному параметру.

Напоминание: регулярная кривая замкнута, если она продолжается до гладкой периодической.

Теорема (Фенхель)

У любой замкнутой регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$, поворот $\geq 2\pi$.



$\int k_{\text{co зн}} = 0$

$\int |k| \overset{?}{\geq} 2\pi$

$\int K_{\text{зн}} = \int K_+ + \int K_-$

$\int K_+ \geq \pi$, $\quad \int K_- \leq -\pi$.

$[v_1, v_2] =$ площадь

$[v_1, v_2] = -$площадь

$K_+ = \max(k, 0)$