Содержание

Содержание

Топологические многообразия (повтор)

Определение (напоминание)

Многообразие размерности n — хаусдорфово пространство со счётной базой такое, что у любой точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$

Многообразия с краем пока не рассматриваем.

Замечание

Если у точки есть окрестность, гомеоморфная открытому $U \subset \mathbb{R}^n$, то есть и окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$
(так как открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$).

Обозначение

Для краткости размерность многообразия часто указывают верхним индексом.
Запись «многообразие M^n» означает то же самое, что «многообразие M размерности n»

Определение

Пусть M — n-мерное многообразие.

Карта — гомеоморфизм $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset M$ и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ открыты.

Атлас — набор карт, области определения которых покрывают M (примечание: используется вольность речи «карты покрывают M»).

Карты также называют локальными координатами.

Атласы и их гладкость

Определение

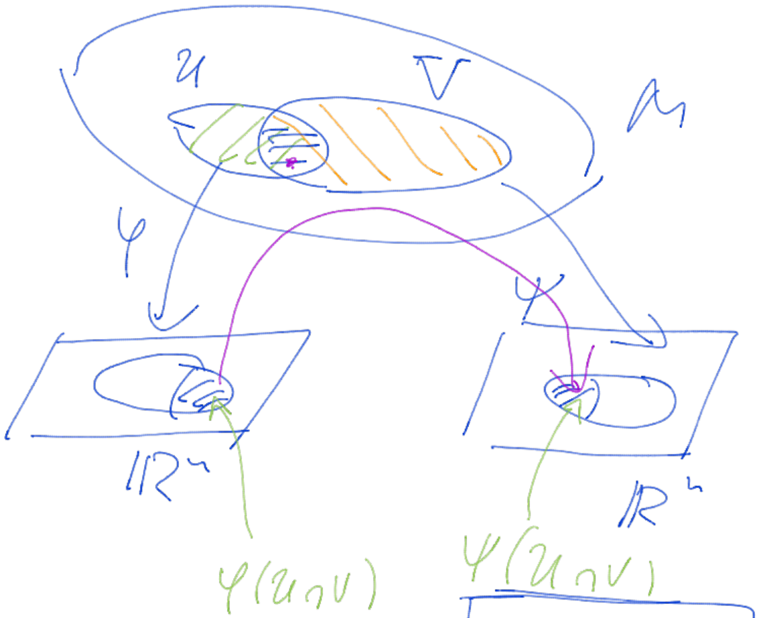
Пусть M — n-мерное многообразие.

Карта — гомеоморфизм $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset M$ и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ открыты.
Атлас — набор карт, области определения которых покрывают M (примечание: используется вольность речи «карты покрывают M»).
Карты также называют локальными координатами.

Отображение перехода между картами $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ — отображение

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Две карты гладко согласованы, если отображение прехода между ними гладкое.
Атлас — гладкий, если все его карты гладко согласованы.



$\varphi^{-1} = (\varphi^{-1})\big|_{\varphi(U\cap V)}$

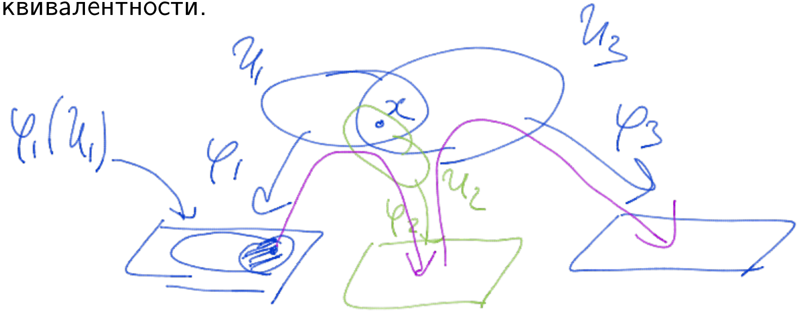
$\boxed{\text{Гладкое} = C^\infty}$

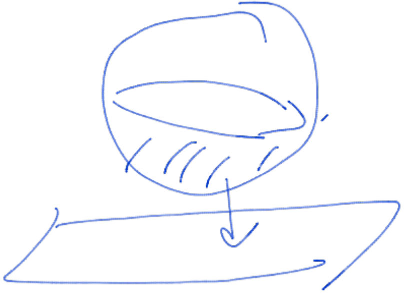
Определение

Два гладких атласа эквивалентны, если их объединение — тоже гладкий атлас.

Легко проверить, что

- Это действительно отношение эквивалентности. V
- В каждом классе эквивалентности есть единственный максимальный (по включению) атлас — объединение всех атласов из класса эквивалентности.





A_1, A_2, A_3 — атласы

$A_1 \sim A_2$

$A_2 \sim A_3$

$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ — гладко в $\boxed{\varphi_1(x)}$

$\shortparallel$

$(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ в окр. x.

Определение гладкого многообразия

Определение

Гладкое многообразие — многообразие с заданным на нём максимальным гладким атласом.
Максимальный атлас также называют стуктурой гладкого многообразия или дифференциальной структурой.

Замечание

Обычный способ задания структуры гладкого многообразия — задать один атлас $\mathcal{A}$ на M.
Тогда дифференциальная структура состоит из всех карт, гладко согласованных со всеми каратами из $\mathfrak{A}$.

Пример: $\mathbb{R}$:

① карта $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\varphi(x) = x$.

дифф. стр на $\mathbb{R}$

стандартная

② карта $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\psi(x) = x^3$

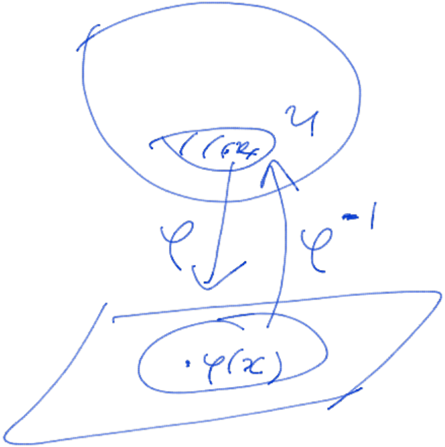
не станд.

$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = x^{1/3} \notin C^\infty$.

дифф. стр. на $\mathbb{R}$.

Еще некоторые термины (для информации)

- Вместо «гладкое многообразие» также говорят «многообразие класса C^∞».
  Аналогично определяются многообразия класса C^k, $k \in \mathbb{N}$.
- Область определения карты называется носителем карты.
  Будем использовать вольность речи: вместо «носитель карты содержит то-то» писать «карта содержит то-то».
- Отображения, обратные к картам, называются локальными параметризациями. Иногда их тоже называют картами.
- Если $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — карта и $x \in U$, то координаты точки $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ называются координатами точки x в карте φ.



$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$

координаты x
в карте φ.

Пример ($\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие)

Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.

Другие карты — диффеоморфизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.

$\mathbb{R}^n$

$\varphi \in$ станд.: гл. атласу $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty \\ \varphi^{-1} \in C^\infty \end{cases}$$

Простейшие примеры

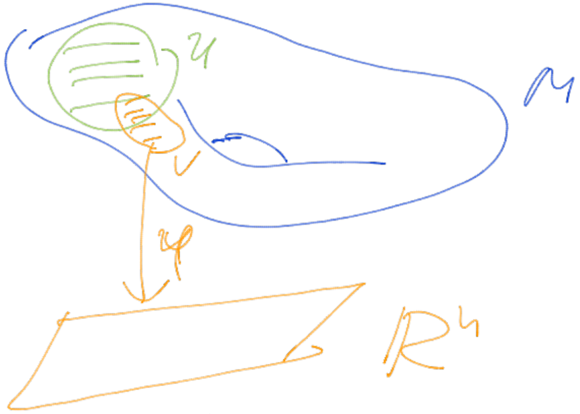
Пример ($\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие)

Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.

Другие карты — диффеормофизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.

Пример

Открытое подмножество гладкого многообразия — гладкое многообразие той же размерности.



$\varphi|_{U \cap V}$ — карта для U.

Простейшие примеры

Пример ($\mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие)

Стандартная дифференциальная структура на $\mathbb{R}^n$ задается одной картой — тождественным отображением.

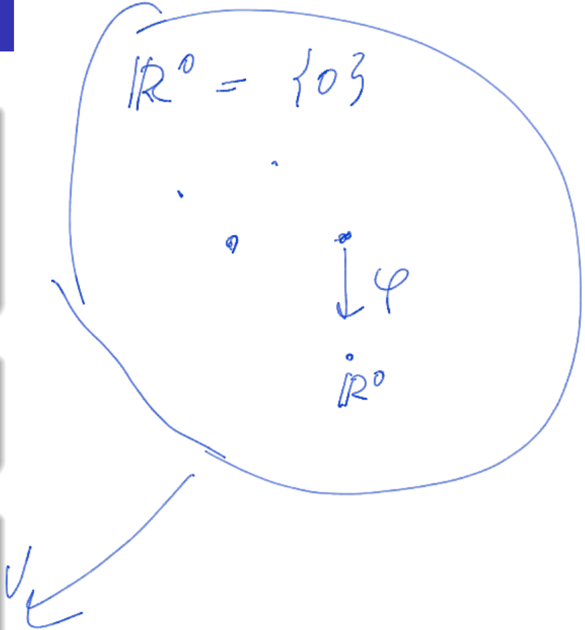
Другие карты — диффеормофизмы $\varphi\colon U \to V$, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества.

Пример

Открытое подмножество гладкого многообразия — гладкое многообразие той же размерности.

Пример

0-мерные многообразия — дискретные пространства и только они.
На 0-мерном многообразии есть единственная дифференциальная структура.



Пример: сфера

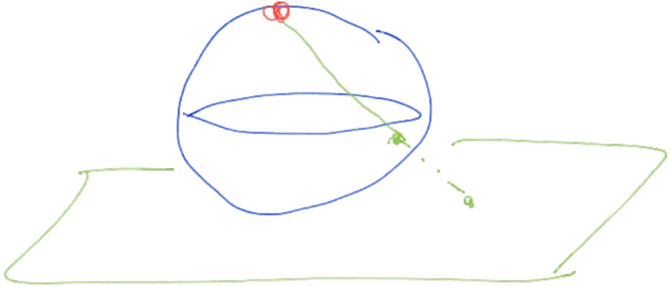
Пример

На сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ можно задать дифференциальную структуру разными естественными атласами, например

- $2n$ ортогональных проекций;
- две стереографические (центральные) проекции

Проверять гладкость отображений перехода будет проще, если заметить, что карты гладко продолжимы на открытые области в $\mathbb{R}^n$.

На самом деле проверять определение вручную не нужно, так как сфера — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (об этом позже)



Содержание

Определение

Определение

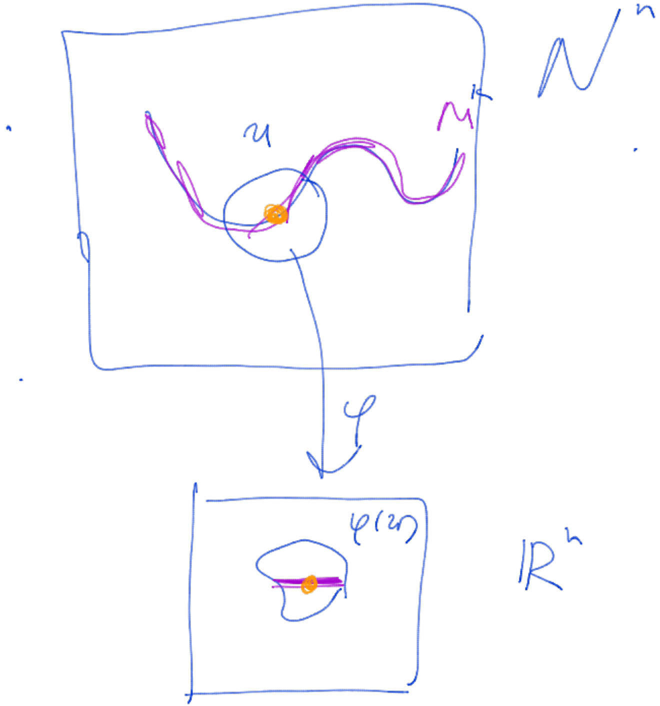
Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \leq k \leq n$.
Множество $M \subset N$ называется **k-мерным гладким подмногообразием**, если: M

для любой точки $x \in \cancel{K}$ существует карта $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ многообразия N такая, что $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U)$.

Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть **выпрямляющими** для M (это не общепринятый термин).

Для краткости слово «гладкое» будет пропускаться.



Определение

Определение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $0 \leq k \leq n$. Множество $M \subset N$ называется k-мерным гладким подмногообразием, если:

для любой точки $x \in K$ существует карта $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ многообразия N такая, что $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U)$.

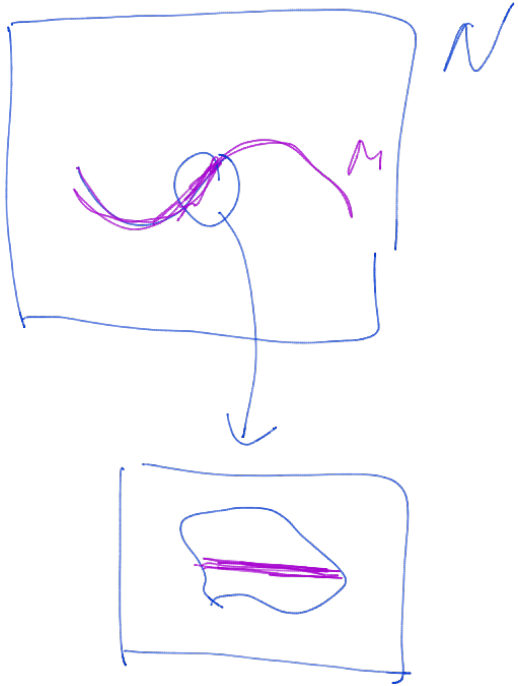
Здесь и далее считается, что $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Такие карты будем называть выпрямляющими для M (это не общепринятый термин).

Для краткости слово «гладкое» будет пропускаться.

Определение

На гладком подмногообразии $M \subset N$ определяется дифференциальная структура: берем в качестве карт всевозможные сужения $\varphi|_{M \cap U}$, где φ — выпрямляющая карта (обозначения как в предыдущем определении).



Пример: графики

Пример

Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ открытое, $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ гладкое. Рассмотрим график

$$\Gamma_f := \{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$$

Это гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$.
Доказательство: рассмотрим карту

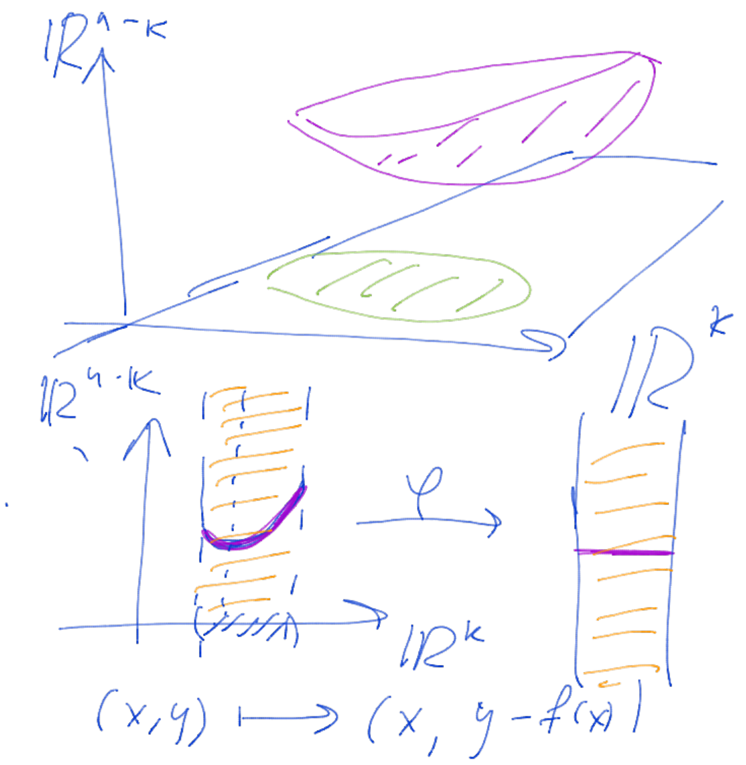
$$\varphi\colon U \times \mathbb{R}^{n-k} \to U \times \mathbb{R}^{n-k}$$

заданную формулой

$$\boxed{\varphi(x, y) = (x, y - f(x))}$$

Это диффеоморфизм (следовательно, карта), она «выпрямляет» Γ_f.

Будем называть такие множества *k-мерными графиками*.



Локальность

Свойство

Определение подмногообразия локально:

- *Открытое подмножество подмногообразия (в смысле индуцированной топологии) — подмногообразие той же размерности.*
- *Если $M \subset N$ — множество, и у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, являющаяся гладким k-мерным подмногообразием, то и всё M — гладкое подмногообразие.*

$$f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Локальность

Свойство

Определение подмногообразия локально:

- *Открытое подмножество подмногообразия (в смысле индуцированной топологии) — подмногообразие той же размерности.*
- *Если $M \subset N$ — множество, и у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, являющаяся гладким k-мерным подмногообразием, то и всё M — гладкое подмногообразие.*

Следствие

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ таково, что у каждой точки $x \in M$ есть окрестность в M, представимая в виде k-мерного графика (при некотором выборе координат), то M — k-мерное гладкое подмногообразие.

Легко видеть, что это условие выполняется для сферы (и многих других примеров).

Т о неявной функции.
Дает локальные графики.

Содержание

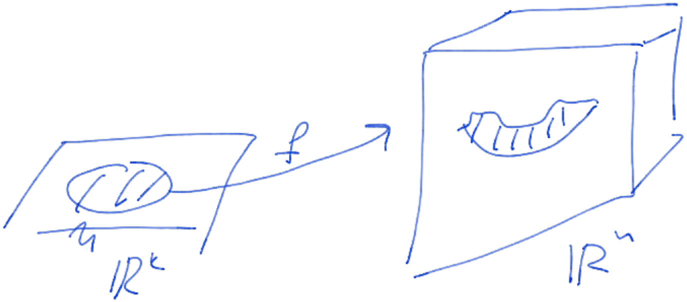
Определение регулярной поверхности

Определение

Регулярная k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ — такое гладкое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, что для любой точки $x \in U$ дифференциал $d_x f$ инъективен (условие регулярности).

Перефомулировки: $\operatorname{rank} d_x f = k$, $\ker d_x f = \{0\}$.

Простая регулярная поверхность (вложение) — регулярная поверхность, которая является топологическим вложением.



f — топологическое влож-е

$\Updownarrow$ def

f — гомеом. между U и $f(U)$

$(f^{-1}\colon f(U) \to U$ — непр.$)$.

Аналогично замене параметра у кривых, можно ввести отношение эквивалентности для регулярных поверхностей («замена параметризации», «замена координат»). Пока обойдёмся без этого.

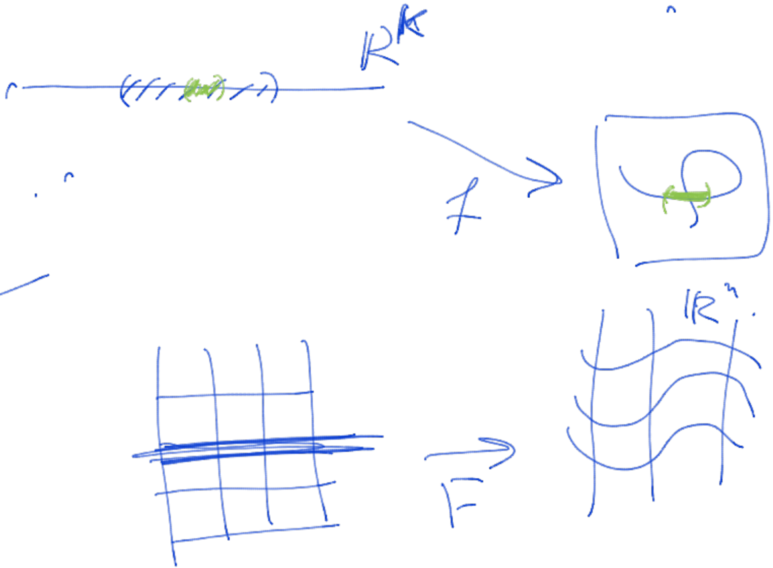
f^{-1} разр. в кр. точке.

Регулярные поверхности и подмногообразия

Теорема

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность.

1. *Локально f — вложение.*
   Т.е. у любой $p \in U$ существует окрестность V $(p \in V \subset U)$ такая, что $f|_V$ — вложение.
2. *Если f — вложение, то $f(U)$ — гладкое подмногообразие.*
   При этом f^{-1} — карта этого подмногообразия.

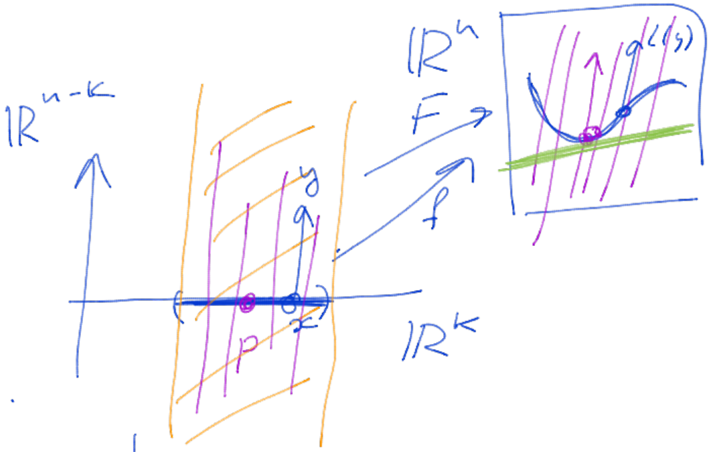


Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом. Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x,y) = f(x) + L(y), \qquad (*).$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу d_pf.

d_pF невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.



$\ker(d_pF) = \ker d_pf \cap \ker L = \{0\}$ | $\operatorname{Im} L \cap \operatorname{Im} d_pf = \{0\}$.

$$d_pF = \left(\frac{d_pf}{L}\right).$$

Доказательство

Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом.
Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

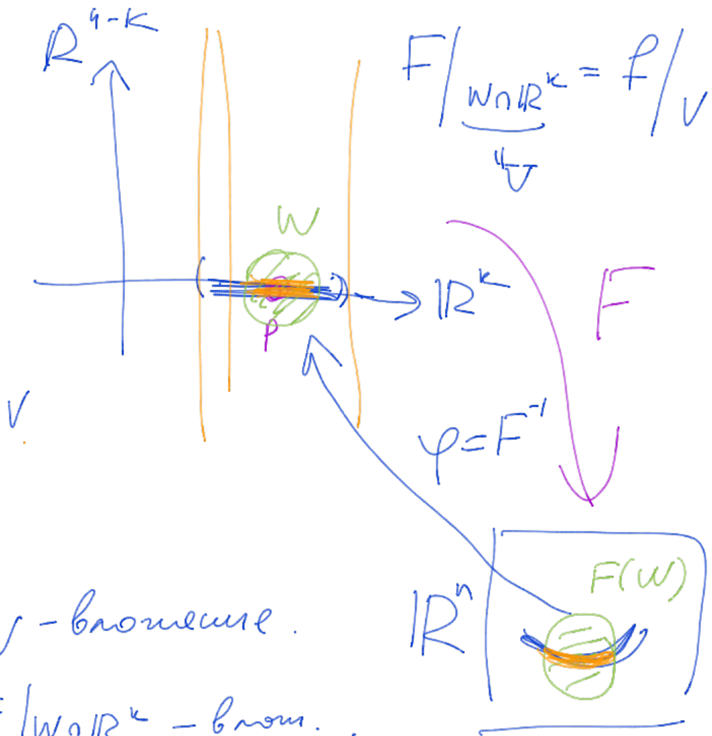
$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\boxed{\varphi\colon F(W) \to W}$.

Пусть $\boxed{V = W \cap \mathbb{R}^k}$. Тогда $f|_V$ — вложение, и φ — выпрямляющая карта для $f(V)$.

$$F|_{\underbrace{W \cap \mathbb{R}^k}_{V}} = f|_V$$



Факт. Сужение вложения — тоже вложение.

$F|_W$ — вложение.
$\Downarrow$
$F|_{W \cap \mathbb{R}^k}$ — влож.

Доказательство

Вложим $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ стандартным образом. Продолжим f до $F\colon U \times \mathbb{R}^{n-k}$:

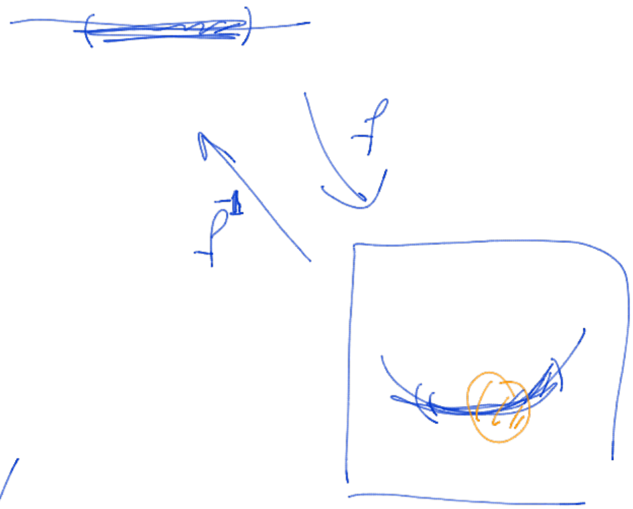
$$F(x, y) = f(x) + L(y),$$

где $L\colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ — инъективное линейное отображение, образ которого — дополнительное подпространство к образу $d_p f$.

$d_p F$ невырожден $\implies$ применима теорема об обратной функции $\implies$ существует окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки p, т.ч. $F|_W$ имеет гладкое обратное $\varphi\colon F(W) \to W$.

Пусть $V = W \cap \mathbb{R}^k$. Тогда $f|_V$ — вложение, и φ — выпрямляющая карта для $f(V)$.

Мы доказали всё, кроме последнего утверждения теоремы (f^{-1} — карта для $f(U)$). Оно доказано для V вместо U. Общий случай следует из локальности свойства гладкой согласованности карт. $\square$



Характеризация подмногообразий $\mathbb{R}^n$

Теорема

Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ два свойства эквивалентны:

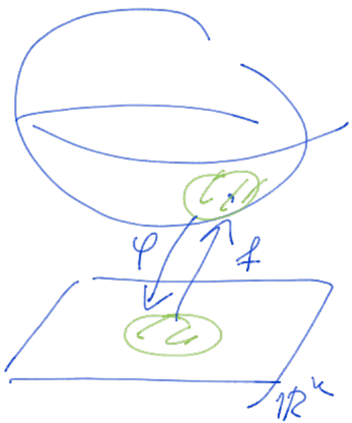
1. *M — гладкое k-мерное подмногообразие;*
2. *У каждой точки $x \in M$ есть окрестность $U \subset M$, которая является образом простой регулярной k-мерной поверхности.*

Определение

Если образ простой регулярной поверхности f является открытым подмножеством M, то f называется локальной параметризацией многообразия M.

Замечание

Локальные параметризации — это в точности отображения, обратные к картам (локальным координатам).



Доказательство теоремы

$2 \implies 1$: из предыдущей теоремы. ✓

$1 \implies 2$: Пусть $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^n$ — выпрямляющая карта для M, где W — окрестность x в $\mathbb{R}^n$.

Возьмём $U = W \cap M$. Тогда $(\varphi^{-1})|_{\varphi(W)\cap\mathbb{R}^k}$ — искомая регулярная поверхность

$\boxed{\text{Ч.т.д.}}$

$d(\varphi^{-1})$ — невыр.

$\Downarrow$

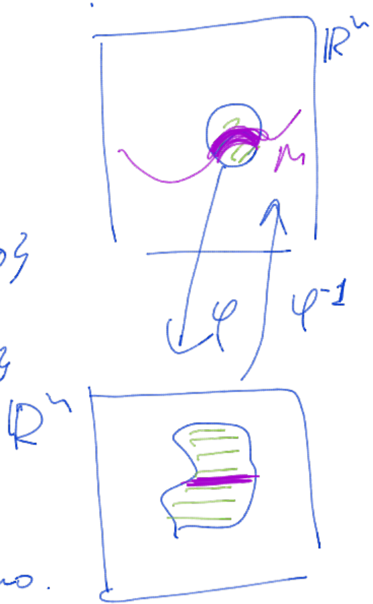
$\ker d(\varphi^{-1}) = \{0\}$

$\Downarrow$

$\ker d(\varphi^{-1})|_{\mathbb{R}^k} = \{0\}$

$\Downarrow$

сужение регулярно.



Содержание

Есть: опр-е гладкости

для $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

(U – открыто)

Определение гладкого отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия,
$f: M \to N$ — непрерывное отображение.

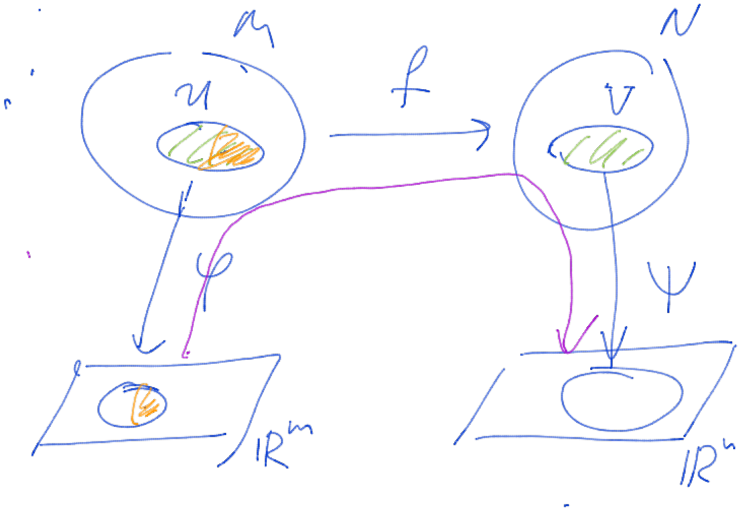
Определение

Пусть $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$ — карты в M и N.

Координатное представление f в картах φ и ψ — это отображение

$$f_{\varphi,\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

Отображение f гладкое, если все его координатные представления гладкие (в том смысле, который определён для $\mathbb{R}^n$).

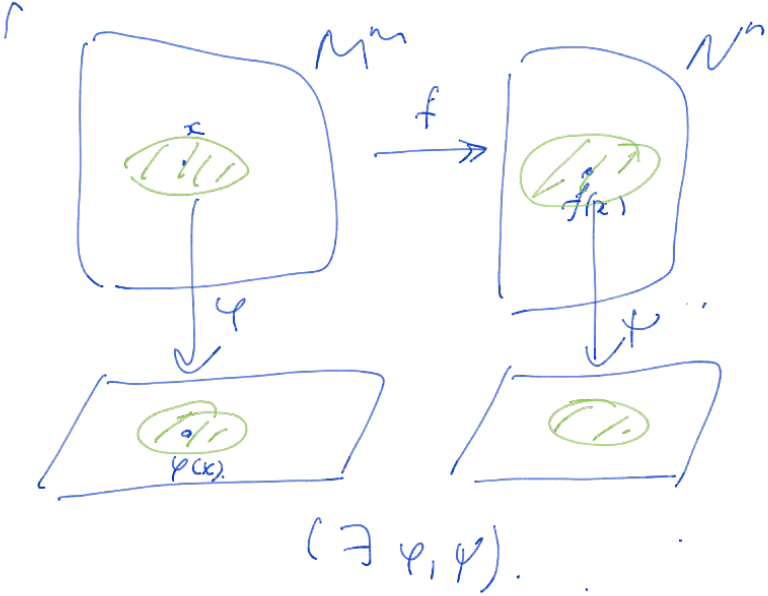


Гладкость в точке

Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f\colon M \to N$ **гладкое в точке** $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.



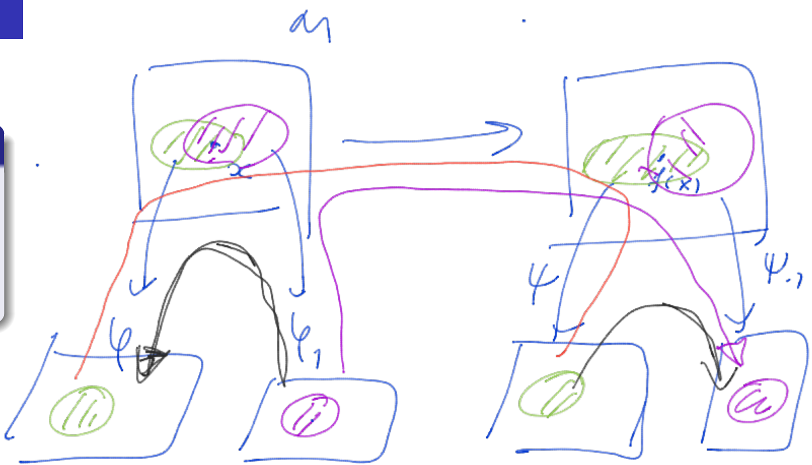
Гладкость в точке

Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f\colon M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

1. Свойство не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.



$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = f_{\varphi_1,\psi_1} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ f_{\varphi\psi} \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$$

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Гладкость в точке

Пусть $f: M \to N$ — непрерывное отображение.

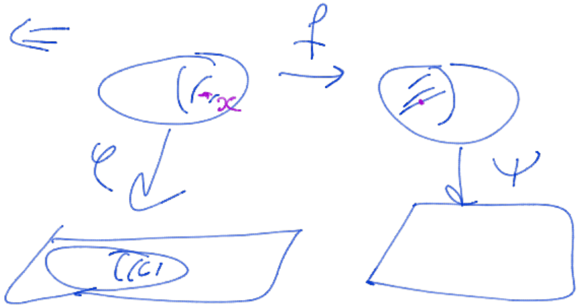
Определение

$f: M \to N$ **гладкое в точке** $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

1. Свойство не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.
2. f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.

$\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$



Гладкость в точке

Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f\colon M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

1. Свойство не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.
2. f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.
3. В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.

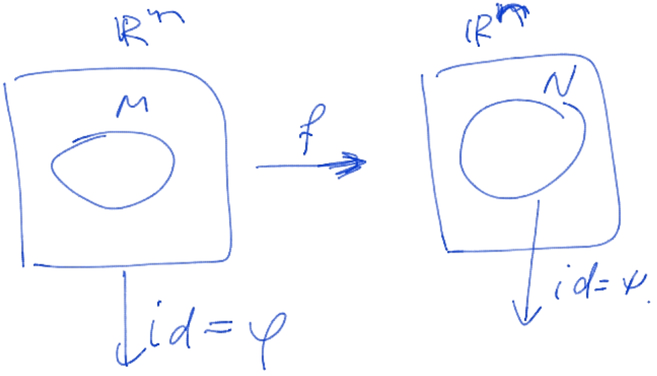
Гладкость в точке

Пусть $f: M \to N$ — непрерывное отображение.

Определение

$f: M \to N$ гладкое в точке $x \in M$, если существуют такие карты $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ гладкое в окрестности точки $\varphi(x)$.

1. Свойство не зависит от выбора карт φ и ψ, содержащих x и $f(x)$.
2. f гладкое $\iff$ оно гладкое в каждой точке.
3. В определении гладкости можно рассматривать не все карты, а только карты из фиксированных атласов M и N.
4. Для открытых множеств $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ определение гладкости эквивалентно обычному (которое для $\mathbb{R}^n$).



$f = f_{id,id}$.

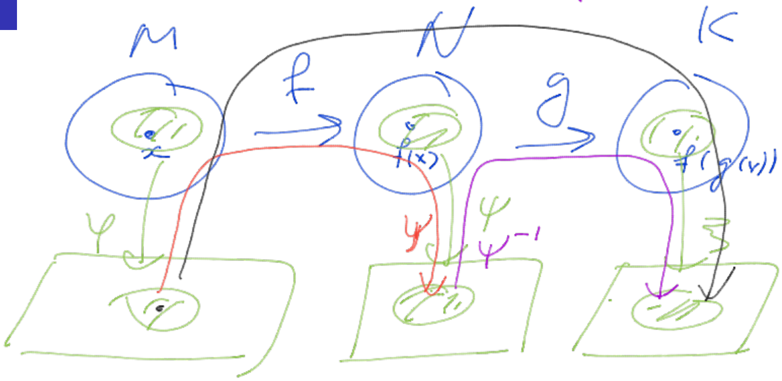
Свойства гладких отображений

1. Тожественное отображение — гладкое.

$$id_{\varphi,\varphi} = id$$

Свойства гладких отображений

1. Тождественное отображение — гладкое.
2. Композиция гладких отображений — гладкое.



$$(g\circ f)_{\varphi,\xi} = g_{\psi,\xi}\circ f_{\varphi,\psi}.$$

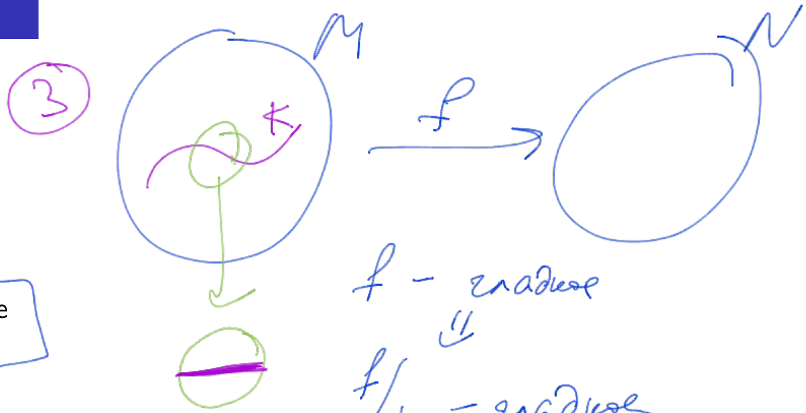
в окр. $\varphi(x)$.

Свойства гладких отображений

1. Тождественное отображение — гладкое.
2. Композиция гладких отображений — гладкое.

Свойства гладких отображений

1. Тождественное отображение — гладкое.
2. Композиция гладких отображений — гладкое.
3. Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).
4. Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $in\colon M \to N$ — гладкое отображение.



f – гладкое

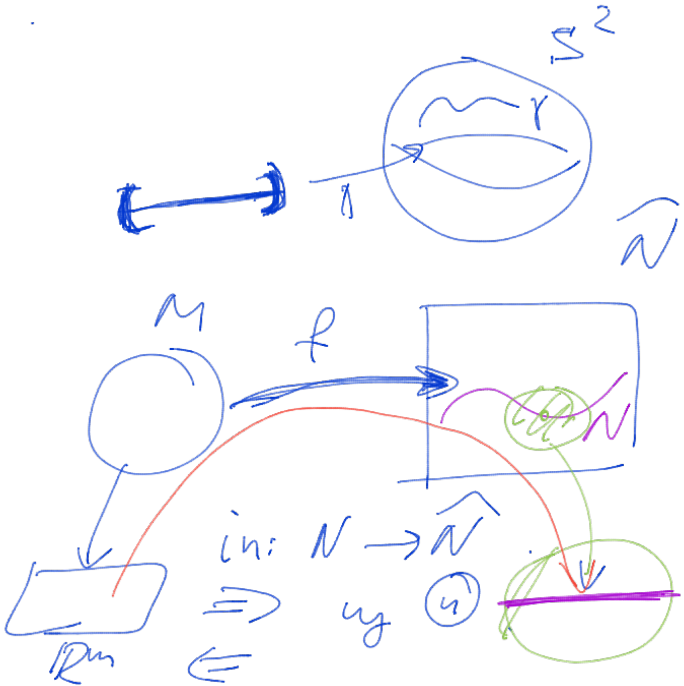
$\Downarrow$

$f|_K$ – гладкое

4 $in\colon K \to M$ – гладкое.

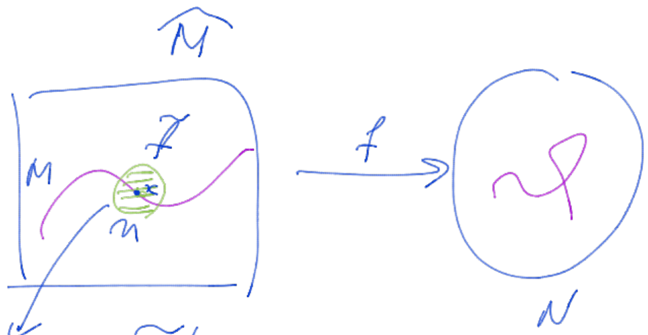
Свойства гладких отображений

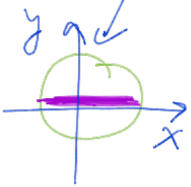
1. Тождественное отображение — гладкое.
2. Композиция гладких отображений — гладкое.
3. Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).
4. Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $in\colon M \to N$ — гладкое отображение.
5. Пусть N — подмногообразие в некотором $\widehat{N}$. Тогда гладкость $f\colon M \to N$ равносильна гладкости f как отображения из M в $\widehat{N}$ (т.е., отображения $in \circ f$, где in — включение).



Свойства гладких отображений

1. Тождественное отображение — гладкое.
2. Композиция гладких отображений — гладкое.
3. Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение (из подмногообразия).
4. Пусть $M \subset N$ — подмногообразие. Тогда включение $in\colon M \to N$ — гладкое отображение.
5. Пусть N — подмногообразие в некотором $\widehat{N}$. Тогда гладкость $f\colon M \to N$ равносильна гладкости f как отображения из M в $\widehat{N}$ (т.е., отображения $in \circ f$, где in — включение).
6. Пусть M — подмногообразие в некотором $\widehat{M}$. Тогда гладкость f равносильна локальной гладкой продолжимости: для любой $x \in M$ существует окрестность $U \ni x$ в $\widehat{M}$ и гладкое отображение $\widetilde{f}\colon U \to N$, продолжающее $f|_{U\cap M}$.





$\tilde{f}|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$.

мн. гл. прод $\Rightarrow$ гладкость (из ③).

гладкость $\Rightarrow$ лок. гл. прод в хороших координатах

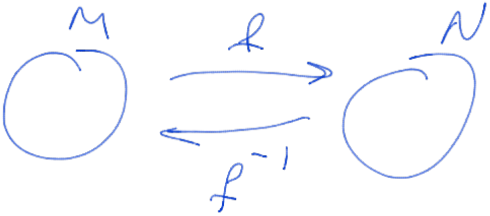
$\tilde{f}(x,y) = f(x)$.

Диффеоморфизм

Определение

Диффеоморфизм — гладкая биекция между гладкими многообразиями, у которой обратное отображение тоже гладкое.
Два многообразия диффеоморфны, если существует диффеоморфизм между ними.

Очевидно, диффеоморфность — отношение эквивалентности.



$$f \text{ — дифф} \iff \begin{cases} f \text{ биекция} \\ f \text{ — гладкое} \\ f^{-1} \text{ — гладкое.} \end{cases}$$

Диффеоморфизм

Определение

Диффеоморфизм — гладкая биекция между гладкими многообразиями, у которой обратное отображение тоже гладкое.

Два многообразия диффеоморфны, если существует диффеоморфизм между ними.

Очевидно, диффеоморфность — отношение эквивалентности.

Свойство

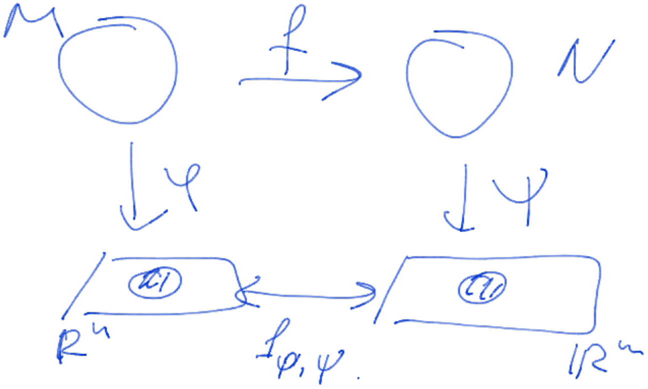
У диффеоморфных многообразий размерности равны.

Доказательство.

Координатное представление диффеоморфизма $f: M^m \to N^n$ — диффеоморфизм между областями в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

Дифференцируя и применяя производную композиции, получаем изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.

Значит, $m = n$. □



$$f_{\varphi,\psi} \circ (f^{-1})_{\psi,\varphi} = id.\ (\mathbb{R}^n)$$

$$d_p(f_{\varphi,\psi}) \circ d_q(f^{-1}_{\psi,\varphi}) = id$$

Диффеоморфизм и карты

Свойство

Карты многообразия M^n — в точности диффеоморфизмы между открытыми областями в M и открытыми областями в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство.

Тривиально из определений. $\square$

$$\varphi_{\varphi, id.} = id$$

$$\varphi^{-1}_{id, \varphi} = id.$$

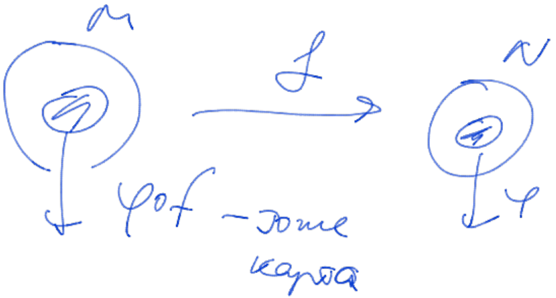
φ — карта в M $\qquad \varphi: \underset{M}{U} \to \mathbb{R}^n.$

id — карта в $\mathbb{R}^n$

Диффеоморфизм и карты

Свойство

Карты многообразия M^n — в точности диффеоморфизмы между открытыми областями в M и открытыми областями в $\mathbb{R}^n$.



Доказательство.

Тривиально из определений. $\square$

Следствие

Диффеоморфизм $f\colon M \to N$ индуцирует биекцию между картами M и N таким образом:
карте $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ многообразия N соответствует карта $\varphi \circ f\colon f^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ многообразия M.

Таким образом, диффеоморфизм — изоморфизм дифференциальных структур.