Содержание

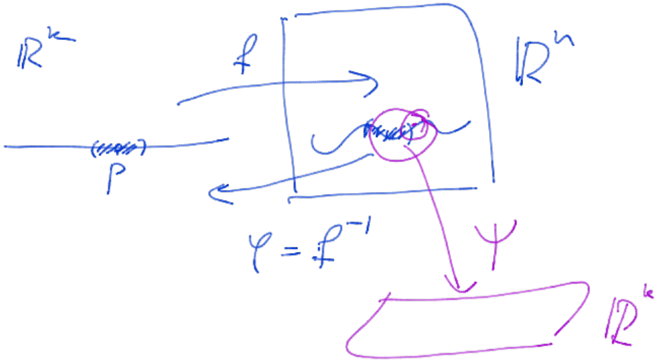
Что было в прошлый раз

Определения:

- Гладкое многообразие
- Гладкое подмногообразие
- Гладкое отображение
- Диффеоморфизм

Примеры и конструкции:

- Открытые области в $\mathbb{R}^n$
- Открытые подмножества гладких многообразий
- Гладкие графики в $\mathbb{R}^n$
- Регулярные поверхности в $\mathbb{R}^n$



Если $\varphi: U \subset M \to \mathbb{R}^k$

– гомеом. на откр. $\varphi(U)$
локально – карта

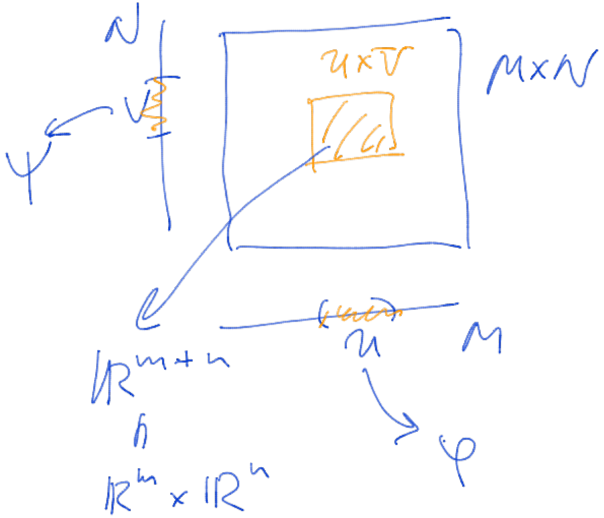
$\Rightarrow$ коорд. карта.

Прямое произведение (упражнение)

Пусть M^m и N^n — гладкие многообразия.
На $M \times N$ вводится структура гладкого многообразия размерности $m + n$ следующим образом:
Для карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ многообразия M и карты $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ многообразия N строим карту

$$\boxed{\varphi \times \psi\colon U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,}$$

где $\boxed{(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y)).}$



Прямое произведение (упражнение)

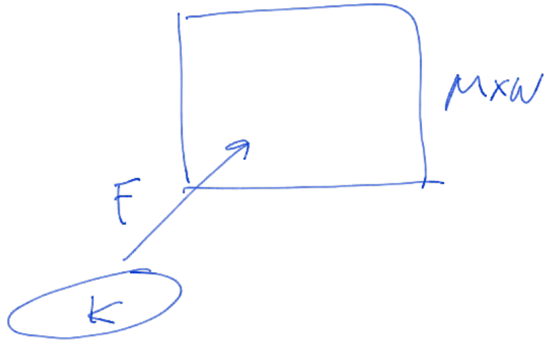
Пусть M^m и N^n — гладкие многообразия.
На $M \times N$ вводится структура гладкого многообразия размерности $m+n$ следующим образом:
Для карты $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ многообразия M и карты $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ многообразия N строим карту

$$\varphi \times \psi\colon U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

где $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$.

Упражнение

1. Это гладкий атлас (т.е. мы определили дифференциальную структуру на $M \times N$)
2. Координатные проекции из $M \times N$ в M и N — гладкие
3. Отображение $F = (f, g)$ из гладкого многообразия K в $M \times N$ гладкое $\iff$ f и g оба гладкие.



$$F(x) = (f(x), g(x))$$

$$F \in C^\infty \iff \begin{cases} f \in C^\infty \\ g \in C^\infty \end{cases}$$

Другие примеры

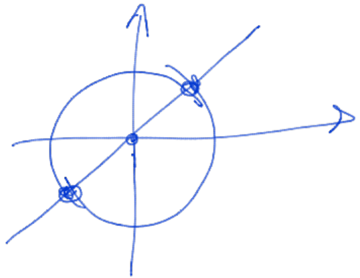
Задача

Придумайте естественную структуру гладкого многообразия на

1. *Проективном пространстве* $\mathbb{RP}^n$
2. *Грассмановом многообразии* $G_{n,k}$ *— множестве всех* k*-мерных линейных подпространств* $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}P^n = S^n/\pm$

$G_{n,1} = \mathbb{R}P^{n-1}$



$\dim G_{n,k} = k(n-k)$. (?)

Содержание

Содержание

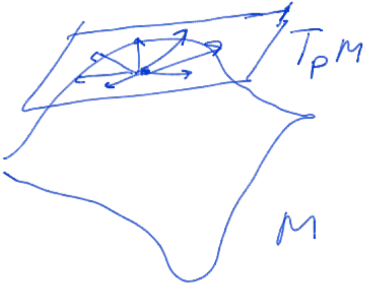
Первое определение касательного вектора

Пусть M^n — гладкое многообразие и $p \in M$.

Рассмотрим всевозможные гладкие кривые
$\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такие, что $\alpha(0) = p$.

Назовем две такие кривые α и β эквивалентными, если для любой карты $\varphi\colon U \subset M \to \mathbb{R}^n$, где $U \ni p$, верно, что

$$\boxed{(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)}$$

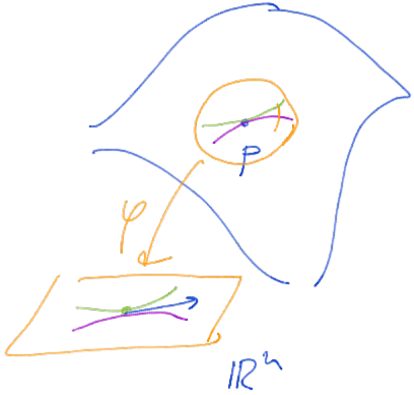


Определение

Касательный вектор многообразия M в точке p — класс эквивалентности кривых по вышеуказанному отношению эквивалентности.

Касательное пространство M в точке p — множество всех касательных векторов в точке p (со структурой векторного пространства, которую определим позже).

Обозначение касательного пространства: T_pM.



Независимость от карты

Свойство

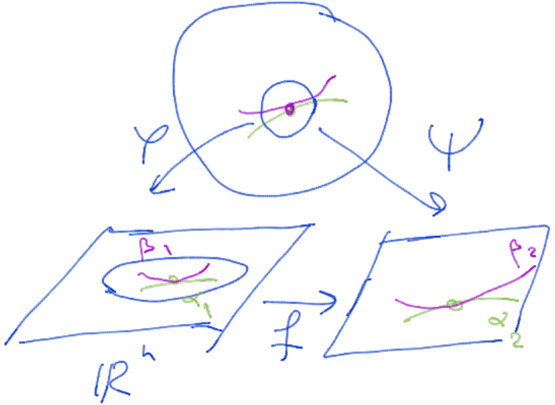
Свойство эквивалентности кривых не зависит от карты: если оно верно для одной карты φ, содержащей p, то оно верно для любой карты ψ, содержащей p.

Доказательство.

Пусть $\alpha_1 = \varphi \circ \alpha$ и $\beta_1 = \varphi \circ \beta$ — кривые в первой карте, $\alpha_2 = \psi \circ \alpha$ и $\beta_2 = \psi \circ \beta$ — кривые во второй карте, $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ — отображение перехода.

Тогда $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$, $\beta_2 = f \circ \beta_1$.

Если $\alpha_1'(0) = \beta_1'(0)$, то $(f \circ \alpha_1)'(0) = (f \circ \beta_1)'(0)$ из производной композиции $\implies$ $\alpha_2'(0) = \beta_2'(0)$. □



$$f = \psi \circ \varphi^{-1}$$

$$f \circ \alpha_1 = \alpha_2$$

$$(f \circ \alpha_1)'(0) = df_{\alpha_1(0)}(\alpha_1'(0)) \qquad f \circ \beta_1 = \beta_2$$

Координаты касательного вектора

Определение

Пусть $v \in T_pM$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — карта M, $p \in U$. Рассмотрим вектор

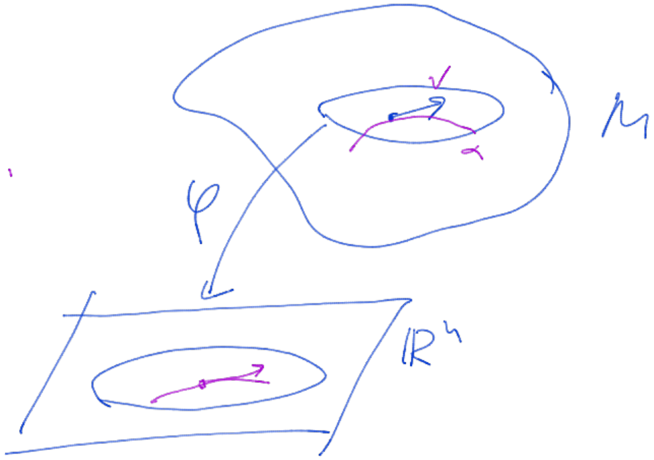
$$\boxed{v_\varphi := (\varphi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n,}$$

где α — любая кривая, представляющая v.

Вектор v_φ — координатное представление касательного вектора v в карте φ.

Его координаты — координаты v в карте φ.

По определению касательного вектора, v_φ не зависит от выбора кривой α, представляющей v.



$\varphi\circ\alpha$

$\alpha \sim \beta$

$$\underset{\substack{\parallel \\ v_\varphi \\ (\text{через } \alpha)}}{(\varphi\circ\alpha)'(0)} = \underset{\substack{\parallel \\ v_\varphi \\ (\text{через } \beta)}}{(\varphi\circ\beta)'(0)}$$

Вектор задается своими координатами

Свойство

Для любой карты φ, содержащей p, соответствие $v \mapsto v_\varphi$ — биекция между T_pM и $\mathbb{R}^n$.

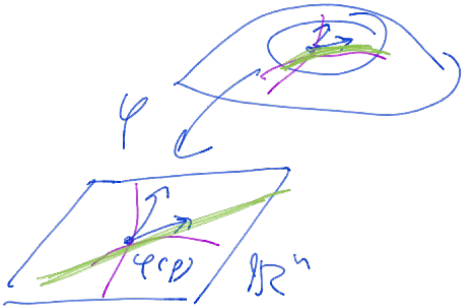
Доказательство.

Инъективность: из определения и того, что эквивалентность кривых не зависит от карты.

Сюръективность: вектор с координатным представлением $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ представляется кривой

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\hat{v})$$

$\square$



Дан $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$

Надо: $\exists\ v \in T_pM$.

$v_\varphi = \hat{v}$

Замена координат

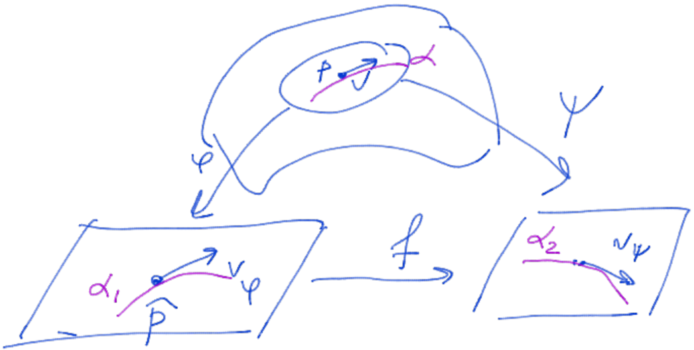
Свойство

Пусть φ *и* φ *— две карты, содержащие* $p \in M$, $v \in T_pM$, $\widehat{p} = \varphi(p)$. *Пусть* $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ *— отображение перехода. Тогда координатные представления* v *в картах* φ *и* ψ *связаны соотношением:*

$$\boxed{v_\psi = d_{\widehat{p}} f(v_\varphi)}$$

Доказательство.

Из производной композиции. □



$$\alpha_2 = f \circ \alpha_1$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_2'(0) & = & d_{\hat{p}} f(\alpha_1'(0)) \\ \| & & \| \\ v_\psi & & v_\varphi \end{array}$$

Другое определение касательного вектора

Из доказанного следует, что касательный вектор в точке p можно эквивалентно определить так:

Определение

Касательный вектор в точке p — отображение v из множества всех карт, содержащих p, в $\mathbb{R}^n$ ($\varphi \mapsto v_\varphi$) такое, что для любых двух карт φ и ψ верно равенство из предыдущего свойства:

$$v_\psi = d_{\varphi(p)} f(v_\varphi).$$

Структура векторного пространства на T_pM

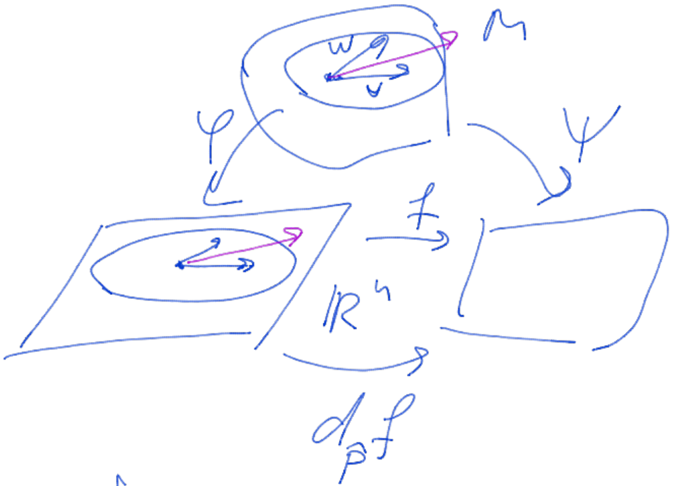
Определение

Пусть $v, w \in T_pM$, φ — карта в окрестности p.
Определим сумму $v + w \in T_pM$ как такой вектор из T_pM, что

$$\boxed{(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi}$$

(складываем координаты и в карте и берём вектор с полученными координатами).
Аналогично определяется умножение касательного вектора на число $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda v)_\varphi = \lambda(v_\varphi)$.

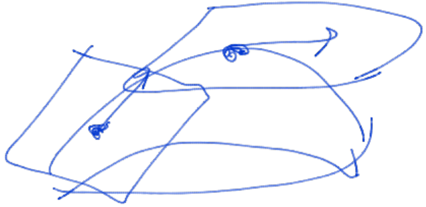
- Определение корректно (вектор с такими свойствами существует и единственен).
- Определение не зависит от выбора карты φ. Это следует из линейности правила пересчёта координат касательного вектора при замене карты.
- Координатное представление $v \mapsto v_\varphi$ — изоморфизм векторных пространств T_pM и $\mathbb{R}^n$.



$$\begin{cases} T_pM \text{ — вект. пр-во над } \mathbb{R} \\ \dim T_pM = n \end{cases}$$

Касательное расслоение

Касательное расслоение — (дизъюнктное) объединение касательных пространств T_pM по всем $p \in M$.
Касательные пространства вида T_pM называются слоями касательного расслоения.



Касательное расслоение

Касательное расслоение — (дизъюнктное) объединение касательных пространств T_pM по всем $p \in M$. Касательные пространства вида T_pM называются **слоями** касательного расслоения.

На TM естественно вводится структура гладкого многообразия размерности $2n$, где $n = \dim M$. А именно, для каждой карты $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ для M строим карту $\Phi \colon \widehat{U} \to \mathbb{R}^{2n}$ для TM, где $\widehat{U}$ — множество касательных векторов в точках из U:

Для $v \in T_xM$, где $x \in U$, определяем

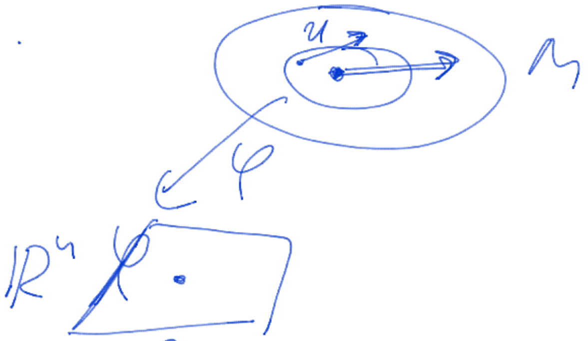
$$\boxed{\Phi(v) = (\varphi(x), v_\varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.}$$

Топология на TM определяется этими картами.

Отображения перехода между такими картами гладкие, так задаются формулами через отображения перехода для M.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

касательное расслоение



$$\Phi: \widehat{U} \to \mathbb{R}^{2n}$$

Для записей

Содержание

Касательное пространство области в $\mathbb{R}^n$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.
Тогда TU естественно отождествляется с $U \times \mathbb{R}^n$ следующим образом:

Паре (p, v), где $p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, соответствует касательный вектор, представленный любой кривой $\alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ с $\alpha(0) = p$ и $\alpha'(0) = v$.

$v \neq w$!

Касательное пространство области в $\mathbb{R}^n$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.
Тогда TU естественно отождествляется с $U \times \mathbb{R}^n$ следующим образом:

Паре (p, v), где $p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, соответствует касательный вектор, представленный любой кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ с $\alpha(0) = p$ и $\alpha'(0) = v$.

Касательное пространство T_pU — это множество таких пар (p, v), где p фиксировано. Таким образом, имеется естественный изоморфизм $\boxed{T_pU \cong \mathbb{R}^n.}$
Это то же самое, что координатное представление касательных векторов в тождественной карте.

Касательное пространство области в $\mathbb{R}^n$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.
Тогда TU естественно отождествляется с $U \times \mathbb{R}^n$ следующим образом:

Паре (p, v), где $p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, соответствует касательный вектор, представленный любой кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ с $\alpha(0) = p$ и $\alpha'(0) = v$.

Касательное пространство $T_p U$ — это множество таких пар (p, v), где p фиксировано. Таким образом, имеется естественный изоморфизм $T_p U \cong \mathbb{R}^n$.
Это то же самое, что координатное представление касательных векторов в тождественной карте.

Этот изоморфизм при необходимости позволяет отождествить $T_p U$ с $\mathbb{R}^n$.

(Примечание: касательные векторы в разных точках не равны, но после такого отождествления могут стать равными. Надо соблюдать осторожность.)

$$T_p U = \{ [\alpha] : \alpha(0) = p \}$$

$$(p, v_1) + (p, v_2) = (p, v_1 + v_2)$$

$(p, v) + (q, w)$ — не определено!

Открытое подмножество многообразия

Пусть M^n — гладкое многообразие, $U \subset M$ открыто, $p \in U$. Тогда U — тоже гладкое многообразие (и n-мерное подмногообразие в M).

Для $p \in U$, касательное пространство T_pU естественно отождествляется с T_pM: вектору из T_pU представленному кривой α, сопоставляем вектор из T_pM, представленный той же кривой.

Соглашение

Имея в виду это отождествление, всегда считают, что $T_pU = T_pM$.

$T_pU = T_pM$

Для записей

Содержание

Дифференциал отображения в точке

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, $p \in M$.

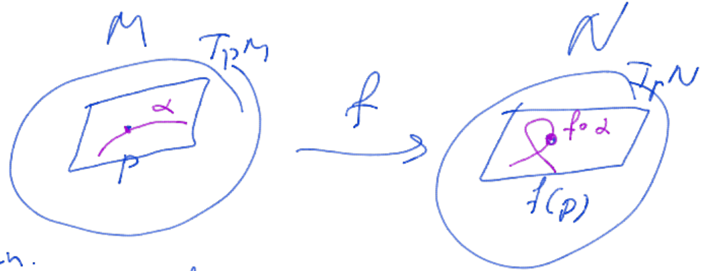
Определение

Дифференциал (касательное отображение) f в точке p — отображение

$$d_p f\colon\ T_pM \to T_{f(p)}N,$$

определяемое следующим образом:

Для $v \in T_pM$, представленного кривой α, $d_pf(v)$ — вектор из $T_{f(p)}N$, представленный кривой $f \circ \alpha$.



Т.н. d_pf.

Опр

$f\colon M \to N$

$d_pf\colon T_pM \to T_pN$

(линейное!).

$d_pf(v)$.

Теорема

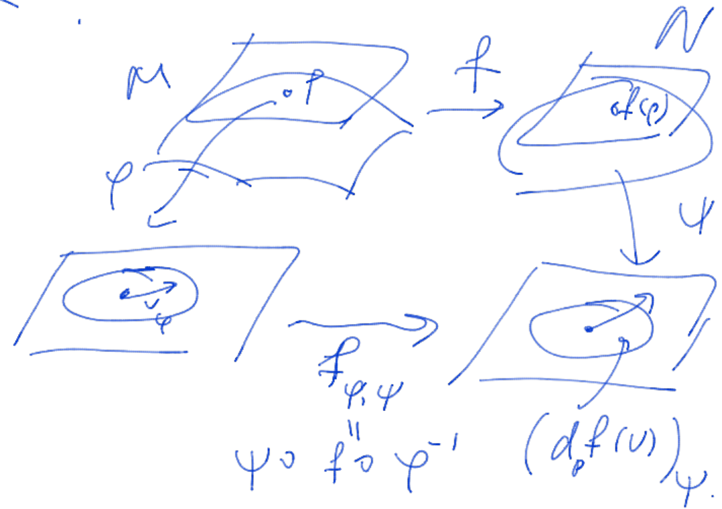
1. d_pf определено корректно; (не зависит от выбора α, представляющей v).
2. d_pf — линейное отображение из T_pM в $T_{f(p)}N$.
3. Для карт φ и ψ в окрестностях p и $f(p)$

$$\boxed{(d_pf(v))_\psi = d_{\varphi(p)}f_{\varphi,\psi}(v_\varphi),} \qquad \forall\, v \in T_pM$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.

для мн-й

для $\mathbb{R}^n$.



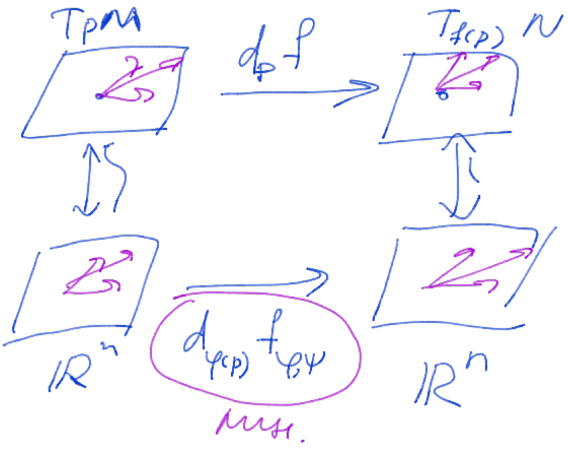
Корректность и т.д.

Теорема

1. $d_p f$ *определено корректно;*
2. $d_p f$ *— линейное отображение из* $T_p M$ *в* $T_{f(p)} N$.
3. *Для карт* φ *и* ψ *в окрестностях* p *и* $f(p)$

$$\underline{(d_p f(v))_\psi} = \underline{d_{\varphi(p)}} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi), \qquad \forall\, v \in T_p M$$

(координатное представление дифференциала — дифференциал координатного представления).
В правой части стоит обычный дифференциал в $\mathbb{R}^n$.



Замечание

В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, определение дифференциала согласовано с обычным, с учетом стандартных изоморфизмов $\underline{T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m}$ и $\underline{T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n}$.
Это следует из третьего утверждения теоремы для тождественных карт.

(Следствие из Теоремы).
часть 3.
для.
$\varphi = \psi = \mathrm{id}$.

Доказательство теоремы

Пусть $v \in T_pM$ представлен кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Переходя в карты φ и φ,

$$\boxed{\psi \circ (f \circ \alpha) = f_{\varphi,\psi} \circ (\varphi \circ \alpha)} \qquad (1)$$

так как $v_\varphi = (\varphi \circ \alpha)'(0)$, получаем

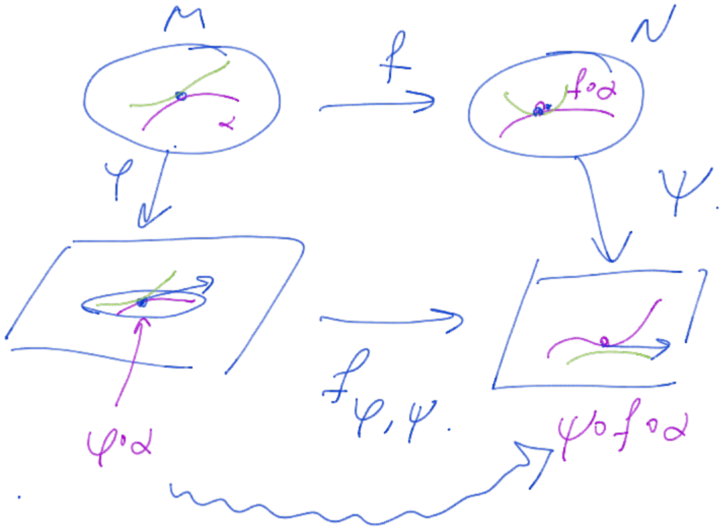
$$\boxed{(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = d_{\varphi(p)} f_{\varphi,\psi}(v_\varphi).} \qquad (*)$$

Правая часть не зависит от выбора α
$\Longrightarrow$ вектор, представленный $f \circ \alpha$, не зависит от α,
$\Longrightarrow$ определение корректно.

Утверждение 3 следует из $(*)$.

Утверждение 2 (линейность) следует из утверждения 3.

$$(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = (d_p f(v))_\psi$$



$(1) \Rightarrow (*)$.

$d_p f(v)$ через α $=$ $d_p f(v)$ через β.

Глобальное касательное отображение

Так как касательные пространства в разных точках не пересекаются, определено отображение

$$df : TM \to TN$$

где

$$df|_{T_pM} = d_pf.$$

Оно позволяет «на законных основаниях» не писать p в обозначении d_pf.

Другое обозначение: Tf.

Замечание: df — гладкое отображение из TM в TN.

$d_pf(v)$

$M \rightsquigarrow TM$

$f: M \to N \rightsquigarrow Tf: TM \to TN$

$Tf = df.$

В координатах

$$(df)_{\varphi\psi}(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{x}, \underbrace{v_1,\dots,v_n}_{v}) = \left(f_{\varphi,\psi}(x),\ d_x f_{\varphi\psi}(v)\right).$$

$\square$

Производная композиции

Теорема

Пусть M, N, K *— гладкие многообразия,* $f : M \to N$, $g : N \to K$ *— гладкие отображения. Тогда*

$$\boxed{d(g \circ f) = dg \circ df.}$$

Или, для $p \in M$,

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f$$

Доказательство.

Тривиально из определения. □

$$(f \circ g) \circ \alpha = f \circ (g \circ \alpha).$$

Производная композиции

Теорема

Пусть M, N, K *— гладкие многообразия,* $f\colon M \to N$*,* $g\colon N \to K$ *— гладкие отображения. Тогда*

$$d(g \circ f) = dg \circ df.$$

Или, для $p \in M$*,*

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f$$

Доказательство.

Тривиально из определения. □

Замечание

Мы построили функтор T из категории гладких многообразий с гладкими отображениями в себя.

Теорема об обратной функции

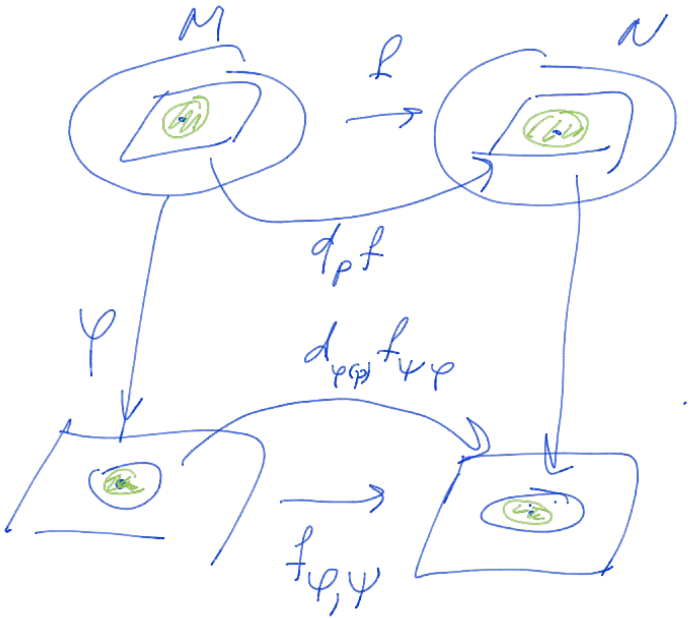
Теорема

Пусть M, N — гладкие многообразия одинаковой размерности, $f : M \to N$ — гладкое отображение, $p \in M$. Предположим, что $d_p f$ — биекция между T_pM и T_pN.

Тогда f — локальный диффеоморфизм в точке p, т.е.: Существует такая окрестность $U \ni p$ в M, что $f(U)$ открыто в N и $f|_U$ — диффеоморфизм между U и $f(U)$.

Доказательство.

Переходом в карты сводится к теореме об обратной функции для $\mathbb{R}^n$. $\square$



Содержание

Дифференциал отображения из $\mathbb{R}$ в M

Пусть M — гладкое многообразие.
Рассмотрим гладкую кривую $\gamma\colon I \to M$.
У неё есть дифференциал $d_t\gamma$ в точке $t \in I$,

$$\boxed{d_t\gamma\colon T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \to T_{\gamma(t)}M.}$$

Линейное отображение из $\mathbb{R}$ в векторное пространство задаётся образом числа 1.

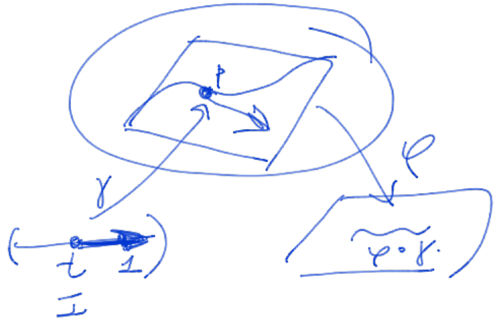
Обозначим

$$\boxed{\gamma'(t) = d_t\gamma(1) \in T_pM,}$$

этот касательный вектор называется скоростью γ в точке t (или в момент t).

Замечание: $\gamma'(0)$ — то же самое, что касательный вектор, представленный кривой γ.

$I \subset \mathbb{R} \to M$



$\boxed{t=0}$

$L\colon \mathbb{R} \to T_pM.$

$L(x) = x \cdot L(1).$

$\forall x \in \mathbb{R}.$

Частные производные

Рассмотрим отображение $f : U \subset \mathbb{R}^k \to M$.
Для него определены частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ или f'_{x_i} или f_{x_i}, где $x_1, \ldots, x_k$ — буквы, выбранные для обозначения координат в $\mathbb{R}^k$.

i-я частная производная в точке p — касательный вектор из $T_{f(p)}(M)$, определяемый равенством

$$\boxed{f'_{x_i}(p) = d_p f(e_i)}$$

где e_i — i-й вектор стандартного базиса $T_pU \cong \mathbb{R}^n$.

$f = f(x_1, \ldots, x_k)$

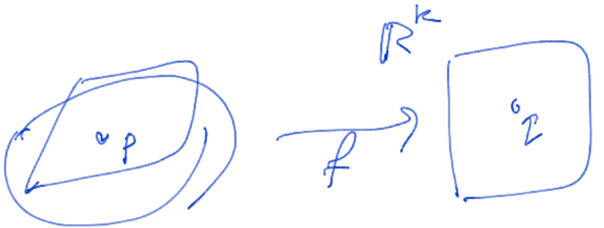
Дифференциал функции из M в $\mathbb{R}^k$

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}^k$, $p \in M$.

Пользуясь стандартным изоморфизмом $T_{f(p)}\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$, дифференциал $d_p f$ обычно считают линейным отображением из T_pM в $\mathbb{R}^k$.

При $k = 1$ получаем, что $\boxed{d_p f \in (T_pM)^*.}$

Элементы $(T_pM)^*$ — ковекторы..



$q = f(p)$

$d_p f : T_pM \to \cancel{T_q}\ \mathbb{R}^k$.

$\cong$

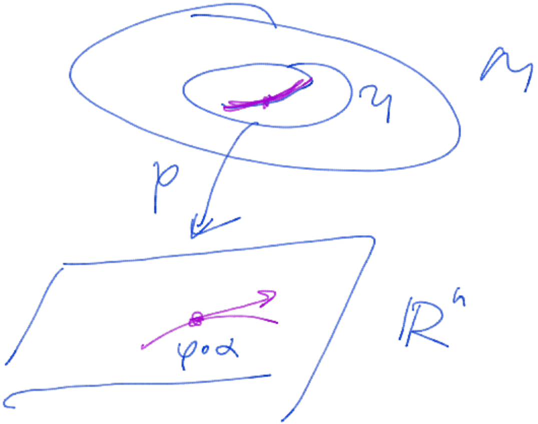
$\boxed{df : TM \to \mathbb{R}^k} \quad \mathbb{R}^k$.

Дифференциал карты

Как частный случай, рассмотрим карту $\varphi\colon U \subset M \to \mathbb{R}^n$.

Ее дифференциал в точке p — линейное отображение $d_p\varphi\colon T_pM \to \mathbb{R}^n$.

Для $v \in T_pM$ из определений следует, что $\boxed{d_p\varphi(v) = v_\varphi}$ — координатное представление v в этой карте.



Содержание

Что надо вспомнить

В первую очередь сейчас будут нужны:

- Определение гладкого подмногообразия.
- Свойство: гладкие отображения в подмногообразие $M \subset N$ — в точности гладкие отображения в N, образы которых содержатся в M.
- Определение регулярной поверхности.
  Теорема: образ простой регулярной поверхности — подмногообразие.

$\mathbb{R}^3$

Содержание

Пусть M^k, N^n — гладкие многообразия, $k \leq n$.

Определение

(Гладкое) погружение — гладкое отображение $f\colon M \to N$ такое, что $d_p f$ инъективно (мономорфизм) для всех $p \in M$.

$\approx$ регулярная пов-ть.

(Гладкое) вложение — гладкое погружение, которое является топологическим вложением (т.е. гомеоморфизмом на образ).

$\approx$ простая рег. пов-ть

Замечание

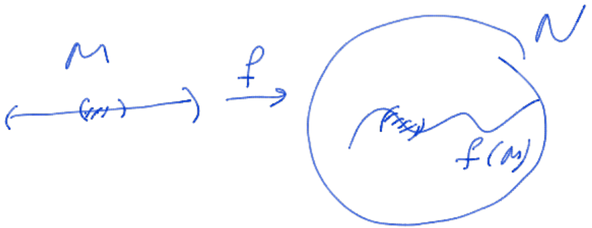
В случае, когда M и N — открытые области в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$, это то же самое, что регулярные поверхности и простые регулярные поверхности.

Основное свойство

M, N – гл. мн-е.

Теорема

1. *Любое погружение $f : M \to N$ локально является вложением. То есть: у любой точки $p \in M$ есть такая окрестность U, что $f|_U$ — вложение.*
2. *Если $f : M \to N$ — вложение, то его образ $f(M)$ — подмногообразие в N.*
   При этом f — диффеоморфизм между M и $f(M)$.



Основное свойство

Теорема

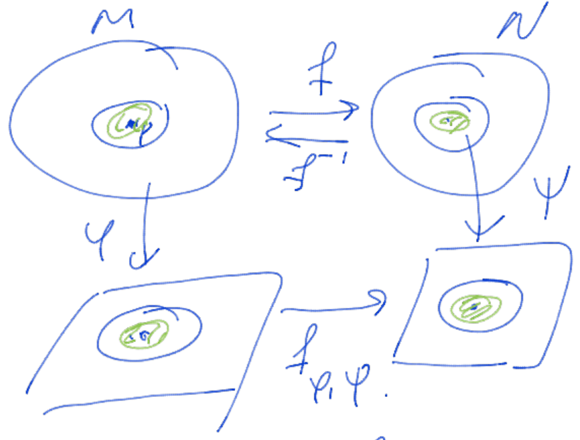
1. *Любое погружение $f\colon M \to N$ локально является вложением. То есть: у любой точки $p \in M$ есть такая окрестность U, что $f|_U$ — вложение.*
2. *Если $f\colon M \to N$ — вложение, то его образ $f(M)$ — подмногообразие в N.*
   При этом f — диффеоморфизм между M и $f(M)$.

Доказательство.

Для областей в $\mathbb{R}^n$ это уже было. Общий случай сводится к разобранному переходом в карты. □

Замечание

Было доказано больше: для погружения $f\colon M \to N$ существуют такие карты φ и ψ в M и N соответственно, что $f_{\varphi,\psi}$ — стандартное включение $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$.



f – рег. в точке p

$\Downarrow$

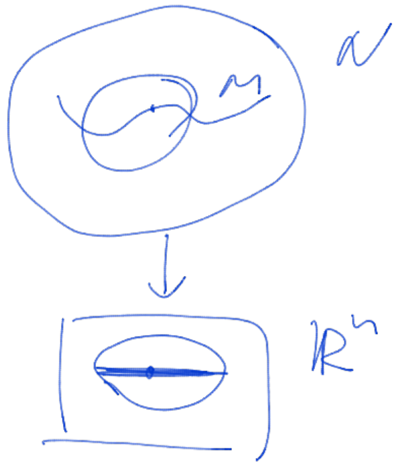
$f_{\varphi,\psi}$ – рег. в точке $\varphi(p)$

вспомнить док-во т. о регулярных пов-тях

Другое определение подмногообразия

Пример

Пусть $M \subset N$ — подмногообразие.
Тогда включение $in \colon M \to N$ — вложение.
(Доказательство: проверка в подходящей карте.)



Другое определение подмногообразия

Пример

Пусть $M \subset N$ — подмногообразие.
Тогда включение $in \colon M \to N$ — вложение.
(Доказательство: проверка в подходящей карте.)

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие.
Множество $K \subset N$ — гладкое подмногообразие тогда и только тогда, когда оно является образом некоторого гладкого вложения.

Доказательство.

Из теоремы и примера. □

Транзитивность подмногообразий

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие, $M \subset N$ — гладкое подмногообразие, $K \subset M$ — подмножество.
Тогда эквивалентны два свойства:

1. K *— гладкое подмногообразие* M*;*
2. K *— гладкое подмногообразие* N*.*

При этом размерность K *и дифференциальная структура на* K*, получаемые из* M *и* N*, совпадают.*

Транзитивность подмногообразий

Теорема

Пусть N — гладкое многообразие, $M \subset N$ — гладкое подмногообразие, $K \subset M$ — подмножество.
Тогда эквивалентны два свойства:

1. *K — гладкое подмногообразие M;*
2. *K — гладкое подмногообразие N.*

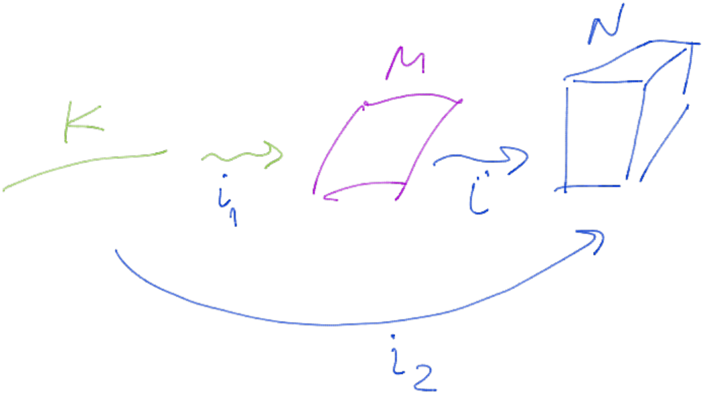
При этом размерность K и дифференциальная структура на K, получаемые из M и N, совпадают.

Доказательство.

Пусть $i\colon M \to N$, $i_1\colon K \to M$, $i_2\colon K \to N$ — включения.
Тогда $i_2 = i \circ i_1$.

Теорема сводится к утверждению: если i_1 — гладкое вложение (относительно некоторой дифференциальной структуры на K), то i_2 тоже, и наоборот.

Это следует из равенства $\boxed{di_2 = di \circ di_1}$ ∎



i — вложение

di — инъект.

Содержание

Стандартное включение

Пусть N^n — гладкое многообразие, $M^k \subset N$ — подмногообразие, $p \in M$.

Рассмотрим включение $in\colon M \to N$.

Так как in — вложение, $d_p in$ — мономорфизм, а его образ — k-мерное линейное подпространство в T_pN.

Соглашение

Касательное пространство T_pM всегда отождествляют с его образом $d_p in(T_pM) \subset T_pN$.
Таким образом, $T_pM \subset T_pN$.

Замечание

Геометрический смысл отождествления:
Вектор из T_pM, представленный кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, отождествляется с вектором из T_pN, представленным той же кривой α.

$\boxed{T_pM \subset T_pN}$

$T_pM \longleftrightarrow d\, in(T_pM)$

Касательное пространство образа вложения

Теорема

Пусть $f : M \to N$ *— вложение,* $p \in M$. *Тогда касательное пространство к подмногообразию* $f(M)$ *в точке* $f(p)$ *— образ дифференциала* d_pf, *т.е.*

$$T_pf(M) = d_pf(T_pM)$$

Касательное пространство образа вложения

Теорема

Пусть $f\colon M \to N$ — вложение, $p \in M$. Тогда касательное пространство к подмногообразию $f(M)$ в точке $f(p)$ — образ дифференциала d_pf, т.е.

$$T_pf(M) = d_pf(T_pM)$$

Доказательство.

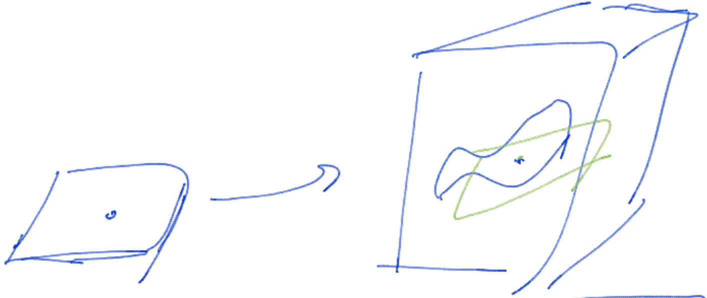
Временно забудем про отождествления.

Пусть $K = f(M)$, $\widehat{f}\colon M \to K$ — то же самое f с заменой формальной области значений. Тогда $f = i \circ \widehat{f}$, где $i\colon K \to M$ — включение.

$\implies d_pf = d_{f(p)}i \circ d_p\widehat{f}$

$\implies d_pf(T_pM) = d_{f(p)}i(d_p\widehat{f}(T_pM))$.

Так как $\widehat{f}$ — диффеоморфизм, $d_p\widehat{f}$ — биекция между T_pM и $T_{f(p)}K \implies d_pf(T_pM) = d_{f(p)}i(T_{f(p)}K)$. Осталось вспомнить про отождествления. $\square$



STOP HERE

$$\boxed{T_pM = \mathrm{Im}(d_pf)}$$