Содержание

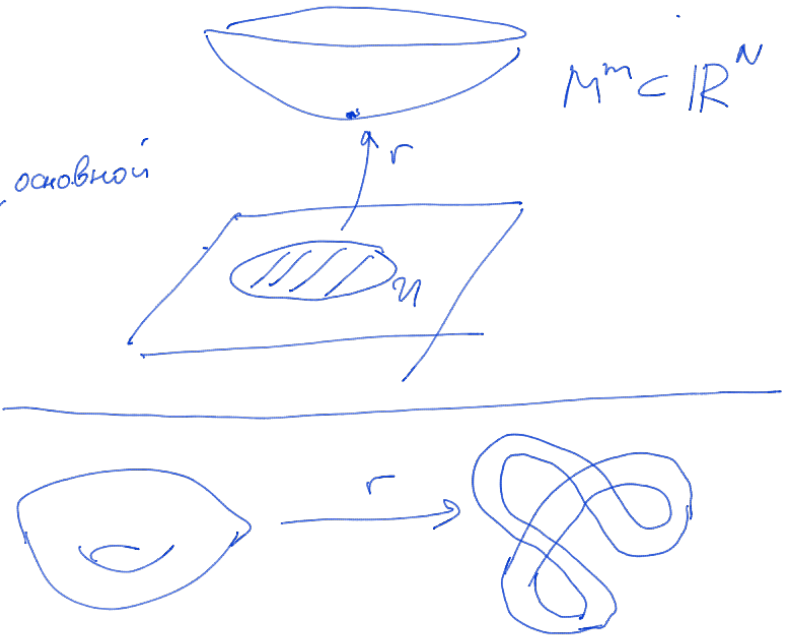
Что такое поверхность

Будем изучать m-мерные поверхности в $\mathbb{R}^N$.
Классический случай: $m = 2$ и $N = 3$.

Слово «поверхность» может означать разные объекты:

1. Вложенное многообразие — гладкое подмногообразие $M^m \subset \mathbb{R}^N$.
2. Регулярная поверхность — гладкое погружение $r\colon U \to \mathbb{R}^N$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ открыто.
   Это будет наш основной способ задания поверхностей.
3. Погруженное многообразие — гладкое погружение $r\colon M \to \mathbb{R}^N$, где M^m — произвольное гладкое многообразие.
   Этот класс включает «самопересекающиеся поверхности» с нетривиальной топологией.
   Нам пока не понадобится.

В основном будем изучать локальную геометрию.
Локально между тремя видами объектов разницы нет.



Обозначения

Рассматриваем регулярную поверхность
$r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$.
Для локальных вопросов можно считать, что это простая поверхность, параметризующая $M \subset \mathbb{R}^N$.

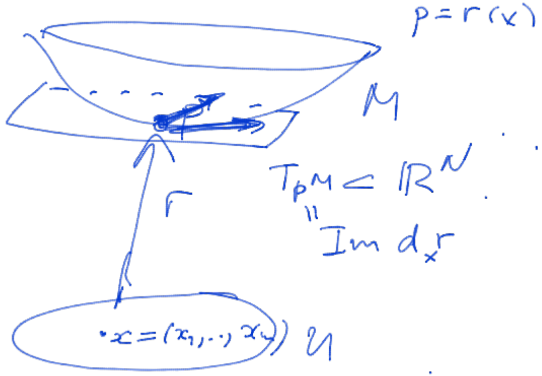
Координаты в U обозначаем $(x_1, \dots, x_m)$ или (x, y).
Рассматриваем точки $x \in U$ и $p = r(x) \in M$.

Наблюдения:

- Дифференциал $d_x r$ — линейный изоморфизм между $\mathbb{R}^m$ и T_pM.
- Он переводит вектор из $\mathbb{R}^m$ в вектор из T_pM с теми же координатами в карте r^{-1}.
- Базисные векторы этих координат в T_pM — частные производные $r_{x_1}, \dots, r_{x_m}$ ($r_{x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}$).

Информация

Есть традиция обозначать координаты в U буквами $u_1, \dots, u_m$ или (u, v). Встречается во многих книгах.



$d_x r\colon \mathbb{R}^n \to T_pM$
биекция.

Содержание

Определение

Надо вспомнить: соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами, матрица билинейной формы.

X - вект. пр-во.

$B: X \times X \to \mathbb{R}$

билинейно, если $B(\cdot, x)$ и $B(x, \cdot)$ - линейно.

симметрична $\iff B(x,y) = B(y,x)$

$B(x,y) = x^T B y$

стр. столб.

$$\boxed{B \longleftrightarrow Q(x) = B(x,x)}$$

$e_1, \ldots, e_n$ - базис

$$\boxed{b_{ij} = B(e_i, e_j).}$$

Биекция

$\left\{\text{симм. билин. формы на } X\right\} \longleftrightarrow \left\{\text{квадратичные формы на } X\right\}$

Надо вспомнить: соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами, матрица билинейной формы.

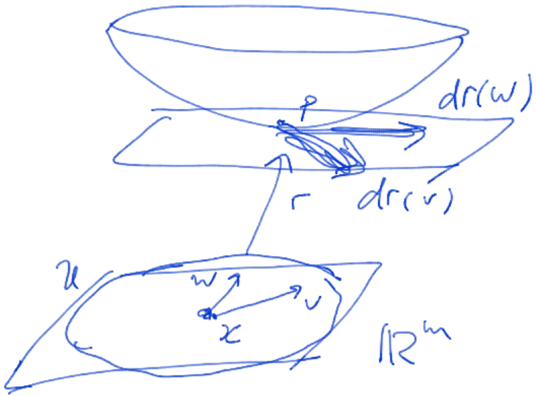
Определение

Первая фундаментальная форма (**метрический тензор**) поверхности $r\colon U \to \mathbb{R}^N$ в точке $x \in U$ — это (в зависимости от контекста) одна из следующих вещей:

1. Симметричная билинейная форма $\mathbf{I}$ на $\mathbb{R}^m$, определяемая равенством
$$\boxed{\mathbf{I}(v,w) = \langle d_x r(v), d_x r(w)\rangle,} \qquad v, w \in \mathbb{R}^m$$
2. Квадратичная форма на $\mathbb{R}^m$, соответствующая этой билинейной форме.
3. Матрица этой билинейной формы.

Обозначения: $\mathbf{I}$, g. Краткая запись: $\mathbf{I} = \langle dr, dr\rangle$.

Для матрицы: (g_{ij}) или $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ (при $m = 2$).

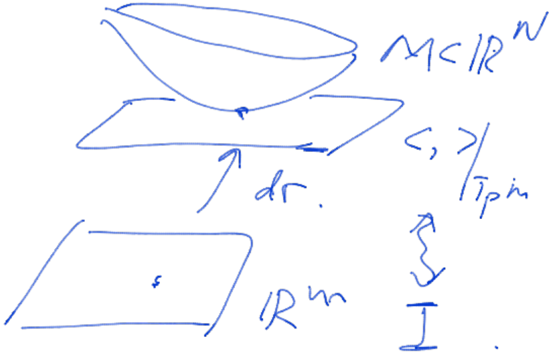


$I(v,w)$

$I(v,v) = |dr(v)|.$

Тривиальные наблюдения

- **I** соответствует скалярному произведению на T_pM при изоморфизме $d_xr\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$. 1
- **I** положительно определена. 2



$$I(v,v) > 0$$
$$\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Тривиальные наблюдения

- **I** соответствует скалярному произведению на T_pM при изоморфизме $d_x r\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$.
- **I** положительно определена.
- $g_{ij} = \langle r_{x_i}, r_{x_j} \rangle$.
- Т.е. это матрица Грама стандартного базиса T_pM.

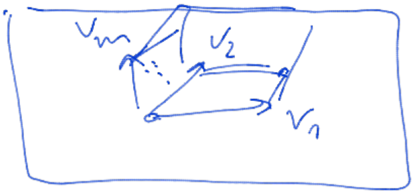
$$g_{ij} = I(e_i, e_j) =$$

$$= \left\langle \frac{\partial r}{\partial x_i}, \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$\boxed{r_{x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}}$$

Тривиальные наблюдения

- **I** соответствует скалярному произведению на T_pM при изоморфизме $d_x r\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$. (1)
- **I** положительно определена. (2)
- $g_{ij} = \langle r_{x_i}, r_{x_j} \rangle$. (3)
- Т.е. это матрица Грама стандартного базиса T_pM. (4)
- Матрица (g_{ij}) невырождена, $\det(g_{ij}) > 0$. (5)
- Невырожденность матрицы — один из способов проверки регулярности поверхности. (6).



$\mathbb{R}^N$

$X = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_m) \cong \mathbb{R}^m$

$e_1, \dots, e_m \in X$ — ортон.

$A = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_m \right)$ $(m \times m)$

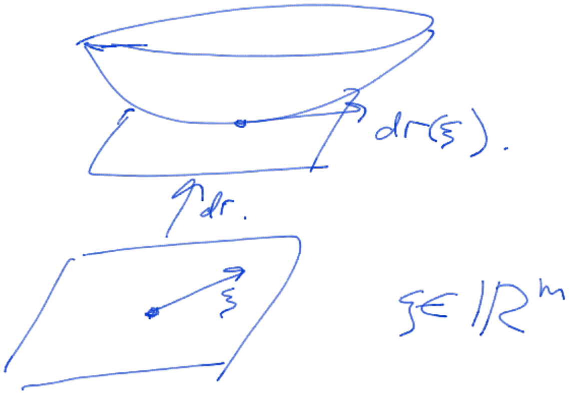
Матрица Грама $= A^T A$.

$$\boxed{\det(g_{ij}) = \det(A)^2}$$

Свойства

- $\mathbf{I}$ позволяет считать длины касательных векторов. Длина касательного вектора с координатами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ равна

$$\sqrt{\mathbf{I}(\xi,\xi)} = \sqrt{\sum g_{ij}\xi_i\xi_j}$$



$$(\xi, \eta) \qquad I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} = \xi^T I \xi = I(\xi,\xi)$$

$$= |dr(\xi)|.$$

Свойства

- $\mathbf{I}$ позволяет считать длины касательных векторов. Длина касательного вектора с координатами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ равна

$$\sqrt{\mathbf{I}(\xi,\xi)} = \sqrt{\sum g_{ij}\xi_i\xi_j}$$

- Аналогично, есть формула для угла между касательными векторами с координатами ξ и η:

$$\cos\angle(\xi,\eta) = \frac{\mathbf{I}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{I}(\xi,\xi)\mathbf{I}(\eta,\eta)}}$$

- **I** позволяет считать длины кривых на поверхности. Для кривой $\gamma(t) = r(x(t)) = r(x_1(t),\dots,x_n(t))$ вектор скорости равен

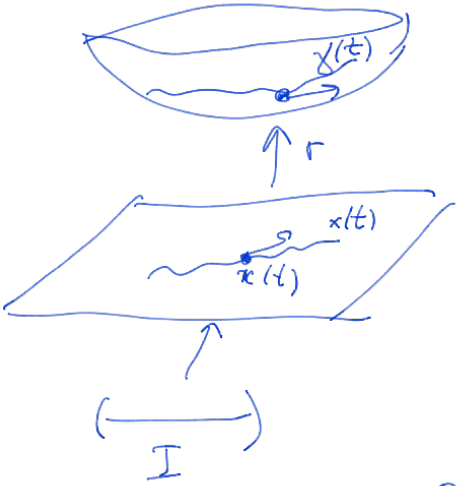
$d r_{x(t)}$

$$\gamma'(t) = dr(x'(t)) = \sum x_i'(t)\, r_{x_i}(x(t)).$$

← в точке $x(t)$

Отсюда

$$\ell(\gamma) = \int_I \sqrt{\mathbf{I}_{x(t)}(x'(t), x'(t))} = \int_I \sqrt{\sum g_{ij}(x(t))\, x_i'(t)\, x_j'(t)} \qquad (*)$$



$$x'(t) = \sum_i x_i'(t)\cdot e_i$$

$$dr(x'(t)) = \sum_i x_i'(t)\cdot \underbrace{dr(e_i)}_{=\, r_{x_i}}$$

$$r_{x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^n$$

Свойства — продолжение

- $\mathbf{I}$ позволяет считать длины кривых на поверхности. Для кривой $\gamma(t) = r(x(t)) = r(x_1(t), \dots, x_n(t))$ вектор скорости равен

$$\gamma'(t) = dr(x'(t)) = \sum x_i'(t)\, r_{x_i}(x(t)).$$

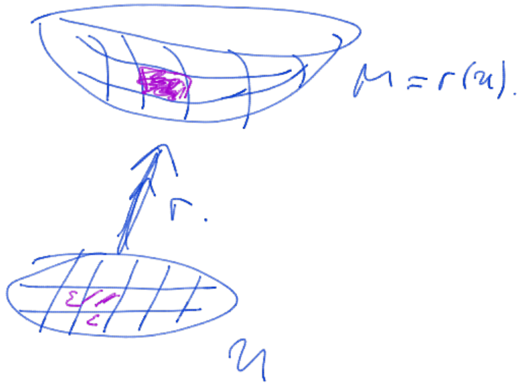
Отсюда

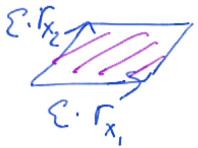
$$\ell(\gamma) = \int \sqrt{\mathbf{I}_{x(t)}(x'(t), x'(t))} = \sqrt{\sum g_{ij}(x(t))\, x_i'(t)\, x_j'(t)}$$

- $\mathbf{I}$ позволяет считать площадь (k-мерный объём) поверхности:

$$area(r(U)) = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})}$$

Доказательство (вместе с определением объема) будет на анализе.





$\sqrt{\det(g_{ij})}$

$\shortparallel$

$Area \approx \sum' \varepsilon^2 |r_{x_1} \wedge r_{x_2}|$

Замена координат

Пусть r и $\widetilde{r}$ — две параметризации одной поверхности, φ — отображение перехода между ними ($\widetilde{r} = r \circ \varphi$)
Тогда их первые формы $\mathbf{I}$ и $\widetilde{\mathbf{I}}$ в соответствующих точках x и $\varphi(x)$ связаны соотношением

$$\widetilde{\mathbf{I}}_{\cancel{\varphi}(x)}(v, w) = \mathbf{I}_{\cancel{x}}(d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)), \qquad v, w \in \mathbb{R}^m$$

$\varphi(x)$

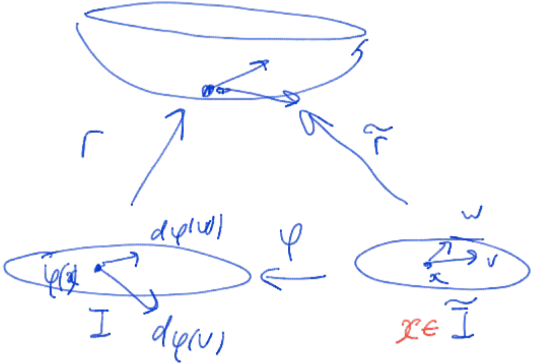
Т.е. $\widetilde{\mathbf{I}}_{\varphi(x)}$ соответствует $\mathbf{I}_x$ при линейном изоморфизме $d_x\varphi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

В матричной записи:

$$[\widetilde{\mathbf{I}}_{\cancel{\varphi}(x)}] = [d_x\varphi]^T [\mathbf{I}_{\cancel{x}}][d_x\varphi]$$

$\uparrow \varphi(x)$

где квадратные скобки обозначают матрицы билинейных форм и линейных отображений.



$\widetilde{r} = r \circ \varphi$

$d\widetilde{r} = dr \circ d\varphi$

$(d\varphi(v))^T I \, (d\varphi(w)) = (v)^T [d\varphi]^T I \, [d\varphi] \, (w)$

Карта $= r^{-1}$

Примеры: плоскость

- Для плоскости в декартовых координатах

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r(x,y) = (x, y, 0).$$

$$r_x = (1, 0, 0)$$

$$r_y = (0, 1, 0)$$

$$I = \begin{pmatrix} \langle r_x, r_x \rangle & \langle r_x, r_y \rangle \\ \langle r_x, r_y \rangle & \langle r_y, r_y \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- Для плоскости в декартовых координатах

$x(t), y(t)$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\int \sqrt{x'^2 + y'^2}$

$t \in I = [a,b]$

- Для плоскости в полярных координатах (ρ, φ)

$(\rho, \varphi) \rightsquigarrow$
$$\boxed{\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}}$$
$(*)$.

$\uparrow r \quad \downarrow r^{-1}$

$\implies$ Длина кривой с полярными координатами $\rho(t), \varphi(t)$ равна

$$\int_I \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}\, dt$$

$r(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0)$

$r'_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$

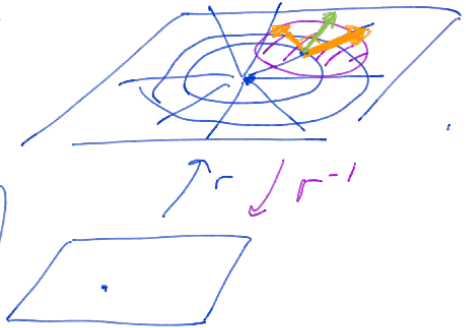
$r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$.

$E = |r'_\rho|^2 = 1$

$F = \langle r'_\rho, r'_\varphi \rangle = 0$

$G = |r'_\varphi|^2 = \rho^2$.

$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$



Примеры: цилиндр

Для цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ можно выбрать параметризацию

$$\boxed{r(x, y) = (\cos x, \sin x, y)}$$

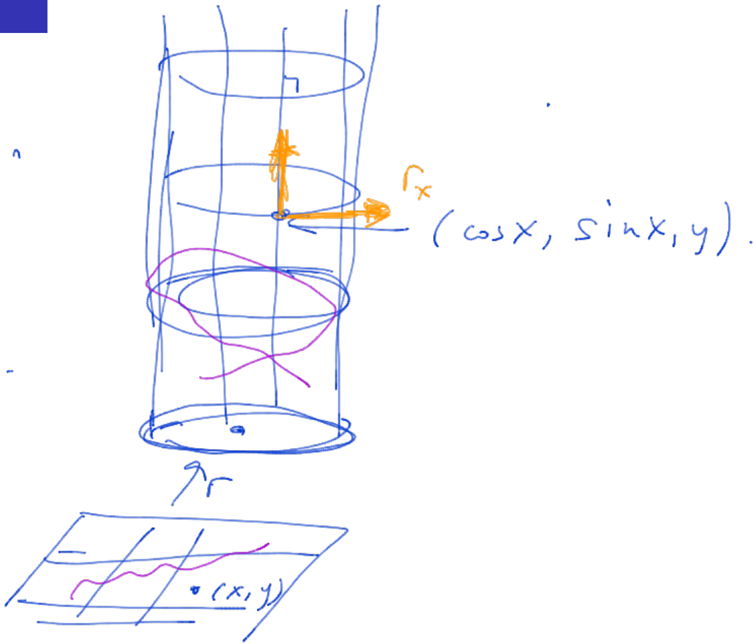
Получается

$$r_x = (-\sin x, \cos x, 0)$$

$$r_y = (0, 0, 1)$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ r сохраняет длины и углы



$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

$$\langle v, w\rangle = \frac{|v|^2 + |w|^2 - |v-w|^2}{2}$$

Примеры: сфера

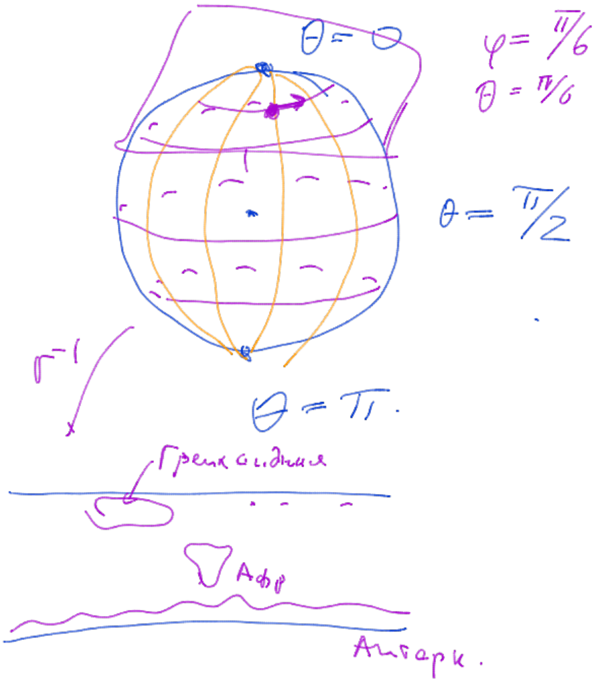
Для сферы со сферическими координатами $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$:

$$r(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$r_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$r_\varphi = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$



Для записей

Содержание

Определение

Определение

Пусть M_1, M_2 — поверхности (одинаковой размерности). Изометрия между M_1 и M_2 — диффеоморфизм $f\colon M_1 \to M_2$ такой, что для любой точки $p \in M_1$, дифференциал $d_pf\colon T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ сохраняет скалярное произведение.

Поверхности изометричны, если существует изометрия между ними.

Замечание

Интуитивный смысл: изометрия изгибает поверхность без внутренних растяжений и сжатий.

$\forall p \in M_1$ $\forall v,w \in T_pM_1$ $\boxed{\langle df(v), df(w)\rangle = \langle v, w\rangle}$

$d_pf\colon T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$

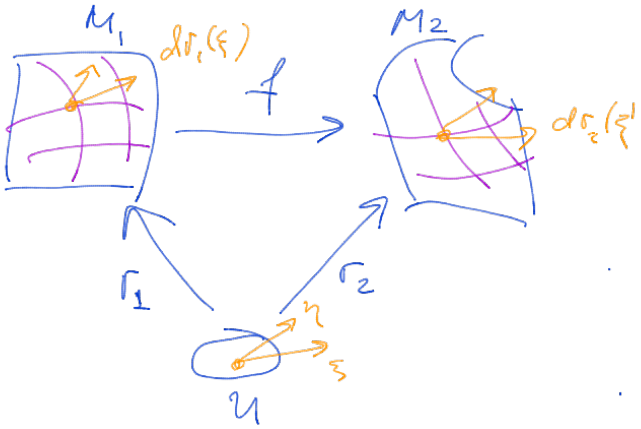
линейное.

Изометрии и первая форма

Теорема

Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — диффеоморфизм, $r_i\colon U \to M_i$ — параметризация M_i ($i = 1, 2$, U общая), $\boxed{r_2 = f \circ r_1}$. Тогда эквивалентны свойства:

1. *f — изометрия*
2. *Для всех $x \in U$ первые формы r_1 и r_2 в точке x равны.*



Доказательство.

Тривиально из определений. □

$$I^{r_1}(\xi,\eta) = I^{r_2}(\xi,\eta)$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle \underbrace{dr_1(\xi)}_{df}, dr_1(\eta)\rangle = \langle dr_2(\xi), dr_2(\eta)\rangle$$

$$I^{r_1} = I^{r_2}$$

$$\boxed{dr_2 = df \circ dr_1}$$

Изометрии и первая форма

Теорема

Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ *— диффеоморфизм,* $r_i\colon U \to M_i$ *— параметризация* M_i *(*$i = 1, 2$*,* U *общая),* $r_2 = f \circ r_1$*.*
Тогда эквивалентны свойства: всей

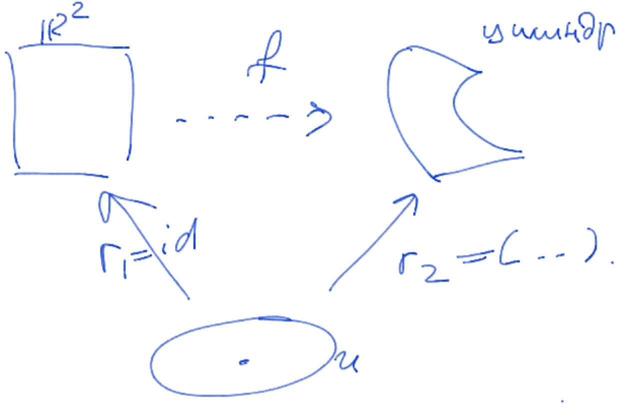
1. f *— изометрия*
2. *Для всех* $x \in U$ *первые формы* r_1 *и* r_2 *в точке* x *равны.*

Доказательство.

Тривиально из определений. $\square$

Следствие

Простые поверхности M_1 *и* M_2 *изометричны* $\iff$ *у них есть такие параметризации* $r_i\colon U \to M_i$*, что их первые формы поточечно равны.*



$f := r_2 \circ r_1^{-1}$

$r_2 = f \circ r_1$.

Примеры

- Цилиндр (над любой регулярной кривой) локально изометричен плоскости.
  (Для круглого цилиндра было, для произвольного аналогично).

$\gamma(t) = (f(t), g(t))$.

натур парам

$$r(x,y) = (\gamma(x), y) = (f(x), g(x), y).$$

$$r_x = (f', g', 0) \quad \perp$$

$$r_y = (0, 0, 1)$$

$$f'^2 + g'^2 = |\gamma'|^2 = 1$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примеры

- Цилиндр (над любой регулярной кривой) локально изометричен плоскости.
  (Для круглого цилиндра было, для произвольного аналогично).
- Конус (над любой регулярной кривой) локально изометричен плоскости.
  (Доказательство с помощью полярных координат).

$$r(x,y) = x\cdot\gamma(y).$$

$$r'_x = \gamma(y).$$

$$r'_y = x\cdot\gamma'(y)$$

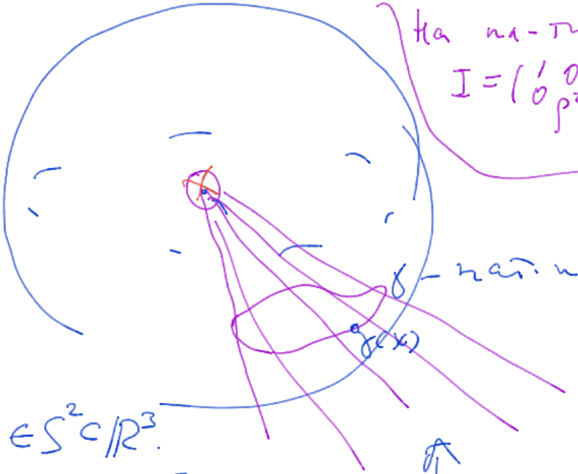
$$E = |r'_x|^2 = |\gamma(y)|^2 = 1$$

$$F = \langle \gamma(x), \gamma'(x)\rangle = 0.$$

$$G = |r'_y|^2 = x^2$$

На пл-ти (ρ,φ)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$



γ – нат. пар.

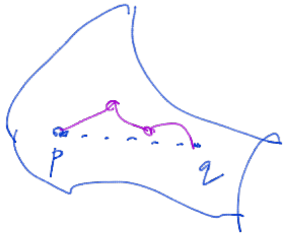
$$\gamma(x) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{|\gamma'| = 1}$$

$$\boxed{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.}$$

Внутренняя метрика



Определение

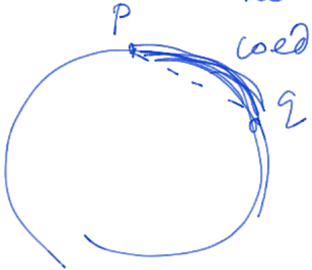
Пусть M — связная поверхность, $p, q \in M$.
Внутреннее расстояние между p и q в M — инфимум длин кусочно-гладких кривых на M, соединяющих p и q.

Легко проверить, что

- M с этим расстоянием — метрическое пространство V
- Изометрии поверхностей сохраняют внутреннее расстояние. V

в смысле диф. геометрии.

$d(p,q) = \inf \{ l(\gamma) :$ γ - кус. гладкая, лежит на M, соединяет p и $q \}$.



Внутренняя метрика

Определение

Пусть M — связная поверхность, $p, q \in M$.
Внутреннее расстояние между p и q в M — инфимум длин кусочно-гладких кривых на M, соединяющих p и q.

Легко проверить, что

- M с этим расстоянием — метрическое пространство
- Изометрии поверхностей сохраняют внутреннее расстояние.

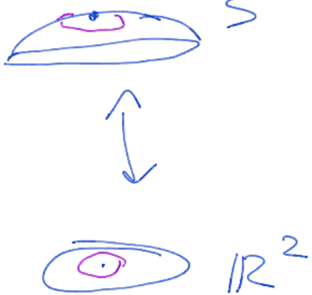
Пример

Сфера не локально изометрична плоскости.

Доказательство.

На сфере другая формула длины окружности. $\square$

$\ell = 2\pi \cdot \sin \rho.$



$\ell = 2\pi \cdot \rho.$

Внутренняя геометрия поверхности

Свойство (или характеристика) поверхности относится к **внутренней геометрии**, если оно одинаково у изометричных поверхностей.

Внутренние свойства — те и только те, которые определяются первой формой.

Например, к внутренней геометрии относятся длины, углы, площади на поверхности.

Кривизны и связанное с ними — обычно не относятся (хотя есть исключения).

Римановы метрики (анонс)

Определение

Риманово многообразие — гладкое многообразие M с дополнительной структурой: на каждом касательном пространстве T_pM задано скалярное произведение, которое гладко зависит от p (в смысле, который определим потом).

Эта структура называется римановой метрикой на M.

Например, риманову метрику в открытой области $U \subset \mathbb{R}^m$ можно определить матричной функций g_{ij} типа первой формы (гладкой, симметричной и положительно определённой в каждой точке).

Всю внутреннюю геометрию поверхностей можно перевести на язык римановых метрик.

Есть теорема Нэша: любое риманово многообразие изометрично вкладывается в $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом N. (Доказывать её не будем).