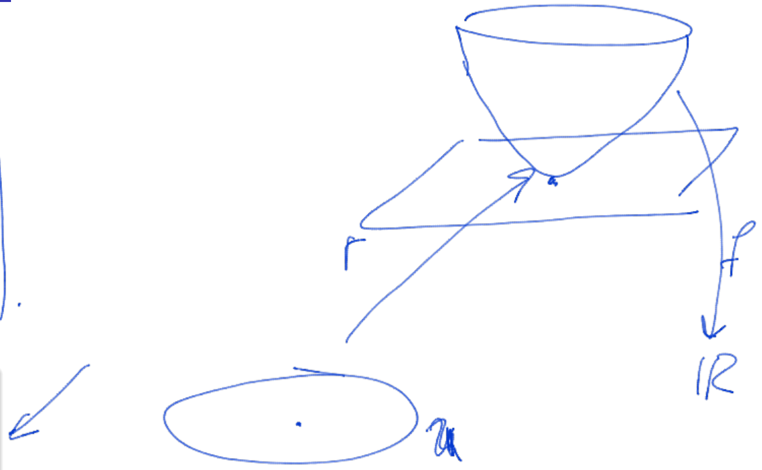
Итоги предыдущей лекции

Вторая форма поверхности имеет две ипостаси:

- Координатная $\mathbf{II} = \langle d^2 r, n\rangle = -\langle dr, dn\rangle$.
- Бескоординатная $\widehat{\mathbf{II}}$ на T_pM:
  1. $\widehat{\mathbf{II}} = \langle \cdot, S(\cdot)\rangle$, где $S = -d_p\widehat{n}$ (оператор Вейнгартена).
  2. $\widehat{\mathbf{II}}$ — второй дифференциал функции на T_pM, графиком которой является поверхность. Задаёт соприкасающийся параболоид.



Задача

Пусть M является прообразом регулярного значения функции $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$. Тогда в точке $p \in M$

$$\widehat{\mathbf{II}} = \frac{(d_p^2 f)|_{T_pM}}{|\operatorname{grad} f(p)|}$$

Подсказка: $\operatorname{grad} f(p)$ пропорционален нормали поверхности.

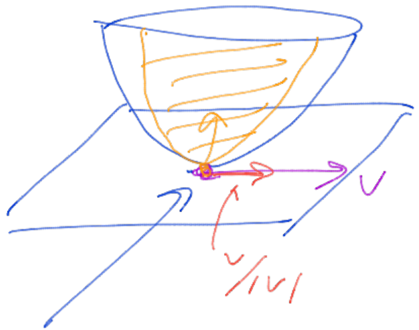
Добавление: кривизна поверхности по направлению

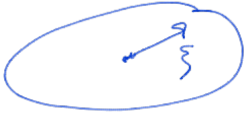
Определение

Пусть $p \in M$, $v \in T_pM \setminus \{0\}$.
Кривизна M по направлению v — значение квадратичной формы $\widehat{\mathbf{II}}$ на векторе $\frac{v}{|v|}$.

Формулы:

- Кривизна по направлению $v \in T_pM$ равна $\dfrac{\widehat{\mathbf{II}}(v,v)}{|v|^2}$
- Кривизна по направлению с координатами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ равна $\dfrac{\mathbf{II}(\xi,\xi)}{\mathbf{I}(\xi,\xi)}$





Информация

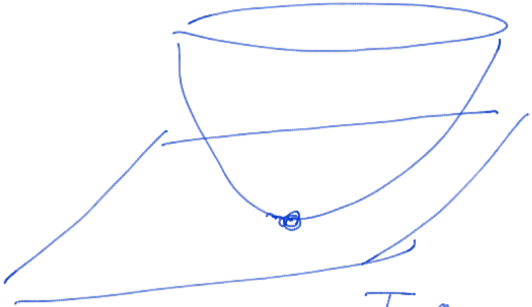
Кривизна поверхности по направлению равна кривизне нормального сечения.
Докажем позже.

Содержание

Напоминание из алгебры

Пусть X — евклидово пространство,
$A\colon X \to X$ — симметричный оператор,
$B\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — соответствующая билинейная форма.
Тогда

1. Все собственные числа A вещественны, существует ортонормированный базис из собственных векторов. ✓
2. Эквивалентно, существует ортонормированный базис, в котором матрица B диагональна. ✓



T_pM

$\langle\ ,\ \rangle$

$\mathrm{II} = \langle \cdot, S(\cdot) \rangle$.

$$A = B = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$$

Продолжаем рассматривать гиперповерхность $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ и точку $p \in M$.
Рассмотрим оператор Вейнгартена $S \colon T_pM \to T_pM$, $S = -dn$.

Определение

Главная кривизна M в точке p — собственное число оператора S.
Главное направление M в точке p — прямая, порождённая собственным вектором оператора S.

Замечание

Для краткости, сами собственные векторы тоже можно называть главными направлениями.

Так как S симметричен, из алгебры следует, что существует m главных кривизн $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ (с учётом кратности), им соответствуют m попарно ортогональных главных направлений.

Вид соприкасающегося параболоида

В ортонормированном базисе из главных направлений матрица второй формы диагональна, на диагонали — главные кривизны.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_m \end{pmatrix}$$

Добавив нормаль, получаем ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{m+1}$. В этом базисе уравнение соприкасающегося параболоида имеет вид

$$2x_{m+1} = \kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2 + \cdots + \kappa_m x_m^2,$$

где $x_1, \ldots, x_{m+1}$ — координаты в нашем базисе, тока p считается началом отсчёта.

Следствие

Набор главных кривизн (с кратностями) определяет соприкасающийся параболоид с точностью до движения.

V.

Случай $m = 2$

В размерности $m = 2$ есть две главные кривизны κ_1, κ_2. Возможны два случая:

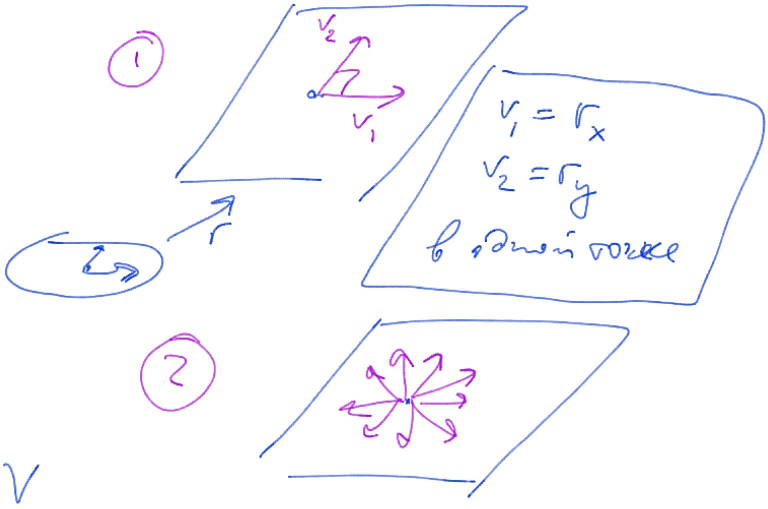
1. $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Тогда существуют ровно два главных направления, они ортогональны.
2. $\kappa_1 = \kappa_2$. Тогда все направления — главные.
   В этом случае точка p называется умбилической.

В обоих случаях существует ортонормированный базис (v_1, v_2) из главных направлений.

Замечание

Можно выбрать параметризацию r так, что в данной точке $r_x = v_1$ и $r_y = v_2$. В таких координатах в этой одной точке матрицы **I** и **II** имеют вид:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{II} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$



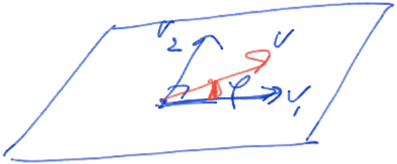
Теорема Эйлера

По-прежнему $m = 2$. Все обозначения те же.

Теорема (Эйлер)

Пусть $v \in T_pM$, $|v| = 1$, $\varphi = \angle(v, v_1)$.
Тогда кривизна M *по направлению* v *равна*

$$\mathbf{II}(v, v) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$$



$$v = \cos\varphi \, v_1 + \sin\varphi \, v_2$$

$$(\cos\varphi \ \ \sin\varphi)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \ldots$$

Доказательство.

$(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — координаты v в базисе (v_1, v_2).
Подставим в матрицу квадратичной формы и получим ответ. $\square$

— умбилическая $\Updownarrow$ параболоид вращения.

Теорема Эйлера

По-прежнему $m = 2$. Все обозначения те же.

Теорема (Эйлер)

Пусть $v \in T_pM$, $|v| = 1$, $\varphi = \angle(v, v_1)$.
Тогда кривизна M *по направлению* v *равна*

$$\mathrm{II}(v, v) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi \in [\kappa_1, \kappa_2].$$

Доказательство.

$(\cos \varphi, \sin \varphi)$ — координаты v в базисе (v_1, v_2).
Подставим в матрицу квадратичной формы и получим ответ. □

Следствие

κ_1 *и* κ_2 — *максимум и минимум кривизны по направлению в точке* p.

Доказательство.

Из теоремы и тождества $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. □

Теорема

- *Бескоординатная формулировка:* Вектор $v \in T_pM \setminus \{0\}$ принадлежит главному направлению $\iff$ $dn(v) \parallel v$.

  При этом $dn(v) = -\kappa_i v$, где κ_i — главная кривизна.

- *Координатная формулировка:* Пусть $r\colon U \to M$ — локальная параметризация M, $x \in U$, $p = r(x)$. Тогда для $\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ два свойства эквивалентны:
  1. ξ — координаты касательного вектора, принадлежащего главному направлению.
  2. $d_x n(v) \parallel d_x r(v)$.

  При этом $d_x n(v) = -\kappa_i d_x r(v)$.

Доказательство.

1 — определение главного направления.

2 — то же плюс производная композиции. $\square$

$n = \hat{n}\colon M \to S^m$

главные напр-я

/

собственные векторы

$d\hat{n}\colon T_pM \circlearrowleft$

собств. число $= -\kappa_i$

$S = -dn.$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= dr(\xi) \\ dn &= d\hat{n} \circ dr \end{aligned}}$$

$n\colon U \to S^m$

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$

Для записей

Содержание

Вычисление главных кривизн в координатах

Теорема

Пусть **I** *и* **II** *— матрицы первой и второй формы в рассматриваемой точке. Тогда главные кривизны — в точности корни уравнения*

1-я форма

$$\det(\mathbf{II} - t\mathbf{I}) = 0$$

относительно неизвестной t.

При этом координаты собственных векторов — такие $\xi \in \mathbb{R}^m$, *что* $(\mathbf{II} - \kappa\mathbf{I})\xi = 0$, *где* κ *— соответствующий корень, а* ξ *— столбец координат.*

Замечание

Это уравнение — полином степени m.
У него могут быть кратные корни, они соответствуют кратным главным кривизнам.
Это будет видно из доказательства.

$\det(h_{ij} - t \cdot g_{ij})$.

$II - kI$ — вырожд.

$$(II - kI)\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

Случай $m = 2$

Пример

При $m = 2$ для $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ и $\mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ получаем уравнение

$$\det \begin{pmatrix} L - tE & M - tF \\ M - tF & N - tG \end{pmatrix} = 0$$

После перегруппировки:

$$(\det \mathbf{I})t^2 - (GL + EN - 2FM)t + \det \mathbf{II} = 0$$

Доказательство теоремы

1 шаг: кривизны. По определению, главные кривизны — собственные числа оператора S.

Вспомним матричную формулу $\mathbf{II} = \mathbf{I} \cdot [S]$,
где $[S]$ — матрица S в базисе (r_{x_i}).

Отсюда $\cancel{[S] = \mathbf{II} \cdot \mathbf{I}^{-1}}$. $S = I^{-1} \cdot II$

Характеристический многочлен для $[S]$:

$$\det([S] - tE) = \det((\mathbf{II} - t\mathbf{I})\mathbf{I}^{-1}) = \boxed{\det(\mathbf{II} - t\mathbf{I})} \det(\mathbf{I}^{-1})$$

Он отличается от $\det(\mathbf{II} - t\mathbf{I})$ умножением на константу $\Longrightarrow$ корни те же.

$[S] = I^{-1} \cdot II$

$\det([S] - tE) =$

$= \det(I^{-1} II - tE)$

$= \det(I^{-1}(II - tI))$

$(S, E) \overset{\cdot I}{\rightsquigarrow} (II, I)$

Доказательство теоремы

1 шаг: кривизны. По определению, главные кривизны — собственные числа оператора S.

Вспомним матричную формулу $\mathbf{II} = \mathbf{I} \cdot [S]$,
где $[S]$ — матрица S в базисе (r_{x_i}).

Отсюда $[S] = \mathbf{II} \cdot \mathbf{I}^{-1}$.

Характеристический многочлен для $[S]$:

$$\det([S] - tE) = \det((\mathbf{II} - t\mathbf{I})\mathbf{I}^{-1}) = \det(\mathbf{II} - t\mathbf{I})\det(\mathbf{I}^{-1})$$

Он отличается от $\det(\mathbf{II} - t\mathbf{I})$ умножением на константу
$\Longrightarrow$ корни те же.

2 шаг: направления. Зафиксируем значение кривизны κ.
ξ — координаты главного направления с кривизной κ
$\iff \underline{[S] \cdot \xi = \kappa\xi}$ (где ξ — столбец) $\iff \mathbf{II} \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \xi = \kappa\xi$
$\iff \underline{\mathbf{II} \cdot \xi = \kappa \mathbf{I} \xi} \iff \underline{(\mathbf{II} - \kappa\mathbf{I}) \cdot \xi = 0}$.

$$\begin{pmatrix} S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\xi_1 \\ \vdots \\ k\xi_m \end{pmatrix}$$

$$I^{-1} \cdot II \cdot \xi = k\xi$$

$$II(v, w) = \langle v, S(w) \rangle$$

Shape operator

$$S \approx II$$

Для записей

Содержание

Определение

Рассматриваем классический случай $M^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Определение

Пусть $p \in M$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — главные кривизны в точке p.

Гауссова кривизна M в точке p — число

$$K = K(p) = \varkappa_1 \varkappa_2$$

Средняя кривизна M в точке p — число

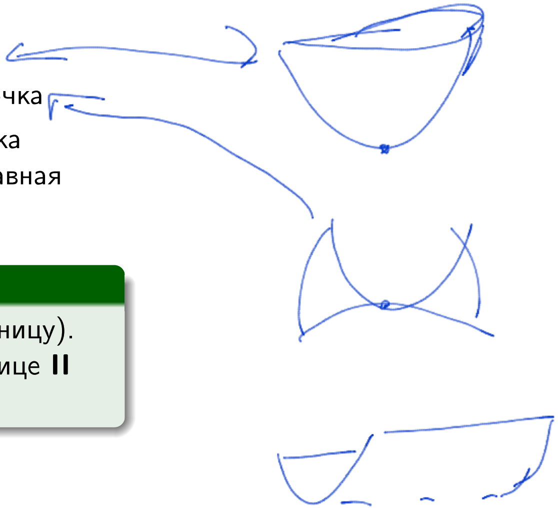
$$H = H(p) = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}$$

K и H определяют $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ с точностью до перестановки. А именно, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — корни уравнения $t^2 - 2Ht + K = 0$.

$\Longrightarrow$ K и H определяют соприкасающийся параболоид с точностью до движения.

Гауссова кривизна и тип точки

- $K > 0 \implies$ эллиптическая точка
- $K < 0 \implies$ гиперболическая (седловая) точка
- $K = 0 \implies$ параболическая точка или точка уплощения (в зависимости оттого, одна главная кривизна обращается в ноль или обе).



Замечание

Знак K равен знаку $\det \mathbf{II}$ (см. следующую страницу). Поэтому тип точки легко определяется по матрице $\mathbf{II}$ (в произвольных координатах).

$n \to -n.$
$H \to -H$
$K \to K.$

$\underline{\mathrm{II}} \to -\underline{\mathrm{II}}$
$k_1, k_2 \to -k_1, -k_2$

Вычисление в координатах

Вспомним уравнение для $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$:

$$(\det \mathbf{I})t^2 - (GL + EN - 2FM)t + \det \mathbf{II} = 0$$

Отсюда по теореме Виета

$$K = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}}$$

$$H = \frac{GL + EN - 2FM}{2 \det \mathbf{I}}$$

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$\det(II - tI)$$

$$\boxed{\det I > 0}$$

Следствие

K и H — гладкие функции на поверхности

Замечание

$\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ не всегда гладкие (могут терять гладкость в умбилических точках).

Третья форма (задача)

Вспомним координатные определения **I** и **II**:

$m = 2$

$r: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$n: U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3.$

$$\mathbf{I} = \langle dr, dr \rangle$$

$$\mathbf{II} = -\langle dr, dn \rangle$$

Аналогично определим «третью форму»:

$$\mathbf{III} = \langle dn, dn \rangle$$

Задача

III вычисляется по **I** и **II**, а именно,

$$\mathbf{III} = 2H\,\mathbf{II} - K\,\mathbf{I}$$

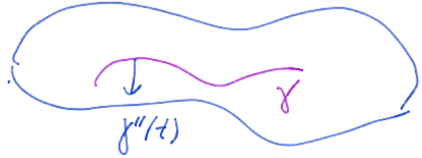
$\checkmark.$

Для записей

Содержание

Нормальная и геодезическая кривизна

Пусть $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — гиперповерхность, $\gamma = \gamma(t)$ — натурально параметризованная кривая в M.



$M \subset \mathbb{R}^{m+1}$

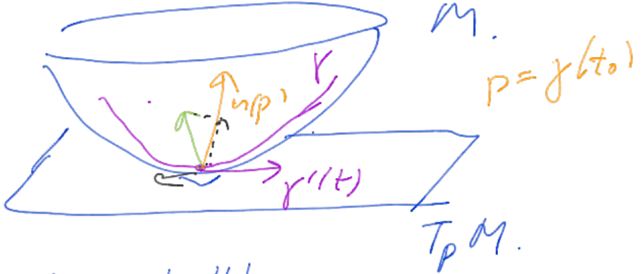
Определение

Нормальная кривизна γ в точке t — длина (со знаком) проекции $\gamma''(t)$ на нормаль поверхности в точке t:

$$\kappa_n = \langle \gamma'', n_M \rangle$$

где n_M — нормаль M.

Геодезическая кривизна γ в точке t — длина проекции $\gamma''(t)$ на $T_{\gamma(t)}M$. Обозначение: κ_g.



$K_\gamma = |\gamma''|$.

$n_\gamma = \dfrac{\gamma''}{|\gamma''|}$.

Свойства:

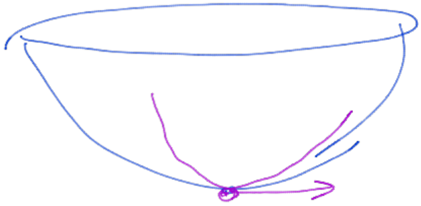
- $\kappa_n = \kappa_\gamma \cos \angle(n_M, n_\gamma)$ (1)
- $\kappa_\gamma = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}$ (по теореме Пифагора). (2).

Замечание: Геодезическую кривизну можно определить не только в коразмерности 1. При $m = 2$ ей можно приписать знак (из ориентации касательной плоскости).

Теорема Менье

Теорема (Менье)

Нормальная кривизна γ в точке t равна кривизне поверхности по направлению $\gamma'(t)$.



Сл. $\gamma \subset S^2$

$\Rightarrow k_\gamma \geq 1.$

Теорема (Менье)

Нормальная кривизна γ в точке t равна кривизне поверхности по направлению $\gamma'(t)$.

Доказательство.

Пусть $n = n_M = \widehat{n}$.
Дифференцируем равенство $\langle \gamma', n \rangle = 0$. Получаем

$$\underbrace{\langle \gamma'', n \rangle}_{= K_n} + \underbrace{\langle \gamma', n' \rangle}_{= -\mathrm{II}(\gamma', \gamma')} = 0. \qquad (*).$$

Первое слагаемое — нормальная кривизна кривой.
Второе:
$\langle \gamma', n' \rangle = \langle \gamma', dn(\gamma') \rangle = -\langle \gamma', S(\gamma') \rangle = -\mathbf{II}(\gamma', \gamma')$. (2) □

$$\langle \underset{\in}{\gamma'(t)}, \underset{\perp}{n(\gamma(t))} \rangle = 0$$

$T_{\gamma(t)}M \qquad T_{\gamma(t)}M.$

$$n(\gamma(t))' = dn(\gamma') = -S(\gamma').$$

$$\mathrm{II} = \langle \cdot, S(\cdot) \rangle =$$

$$= \langle \cdot, -dn(\cdot) \rangle.$$

Пример: сечения плоскостями

Определение

Пусть $p \in M$, $v \in T_pM \setminus \{0\}$.
Нормальное сечение M в точке p в направлении v — пересечение M с плоскостью, порождённой v и $n(p)$.

Следствие

Кривизна поверхности в направлении v равна кривизне нормального сечения в точке p в направлении v (как плоской кривой при выборе той же нормали в точке p).

v

$$\gamma \subset \Pi \Rightarrow \gamma'' \in \vec{\Pi}$$

$$\Rightarrow \gamma'' \parallel n_M .$$

Т. Менье

$$k_\gamma = \frac{II(v,v)}{\underbrace{\cos\angle(n_\gamma, n_M)}_{1}} = II(v,v).$$

Пример: сечения плоскостями

Определение

Пусть $p \in M$, $v \in T_pM \setminus \{0\}$.
Нормальное сечение M в точке p в направлении v — пересечение M с плоскостью, порождённой v и $n(p)$.

Следствие

Кривизна поверхности в направлении v равна кривизне нормального сечения в точке p в направлении v (как плоской кривой при выборе той же нормали в точке p).

Следствие

Пусть γ — сечение M плоскостью $\Pi \ni p$, $\varphi = \angle(\Pi, n(p))$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ (условие трансверсальности). Тогда в точке p

$$\kappa_\gamma = \pm \frac{\mathrm{II}(v,v)}{\cos\varphi}$$

где $v \in T_pM$ — единичный вектор из $T_pM \cap \vec{\Pi}$.

Π — афф. плоскость через p

$\vec{\Pi}$ — ее линейная часть (присоед. лин. подпр-во).

$\Pi \not\subset T_pM$

$\dim \Pi = 2$
$\dim M = m$
$\subset \mathbb{R}^{m+1}$.

Содержание

Геодезические

Определение

Кривая на M — геодезическая, если её геодезическая кривизна равна 0 во всех точках.

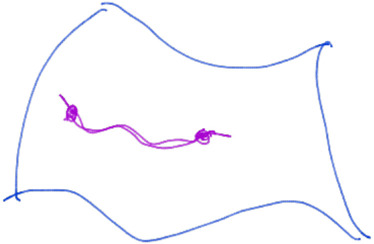
Эквивалентная формулировка: $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$.

γ - геод $\iff k_g = 0$

$\iff \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)} M$

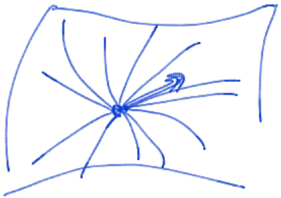
Замечание

Понятие геодезической имеет смысл в любых размерностях и коразмерностях.



Информация (анонс)

- Геодезические — локально кратчайшие кривые на поверхности.
  В частности, геодезические относятся к внутренней геометрии.
- Из каждой точки в каждом направлении выходит ровно одна геодезическая.



Линии кривизны

Теперь рассматриваем только случай $M^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Определение

Кривая на поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — **линия кривизны**, если ее скорость в любой точке принадлежит главному направлению M в этой точке.

Замечание

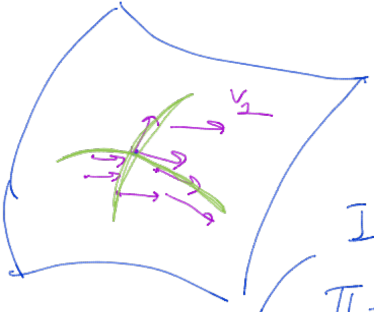
По теореме Родрига, γ — линия кривизны $\iff$ $(n(\gamma(t)))' \parallel \gamma'(t)$ для всех t.

Замечание

Если точка $p \in M$ не умбилическая ($\kappa_1 \neq \kappa_2$) то через p проходит ровно две линий кривизны — по одной в каждом главном направлении.

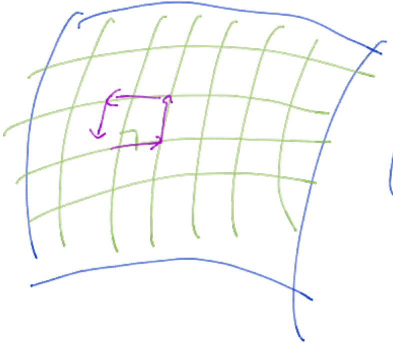
Это следует из того, что главные направления гладко зависят от точки.

Только гладкие кривые ( )



$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\begin{aligned} L &= k_1 E \\ N &= k_2 G. \end{aligned}}$$

Асимптотические линии

Определение

Кривая γ на поверхности — асимптотическая линия, если её нормальная кривизна равна 0 во всех точках.

$\exists$ только при $K \leq 0$.

Переформулировки: γ — асимптотическая $\iff$

- $\mathrm{II}(\gamma', \gamma') = 0 \iff$ во всех точках (т. Менье).
- Главная нормаль n_γ лежит в касательной плоскости $T_{\gamma(t)}M$ при всех t.

T_pM

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства:

- Если в данной точке $K > 0$, то через нее не проходит асимптотических линий. V.
- Если $K < 0$, то через данную точку проходит ровно две асимптотические линии (из гладкой зависимости их направлений от точки). V

$k_1, -k_2$

$$k_1 \cos^2\varphi - k_2 \sin^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{k_1/k_2}.$$

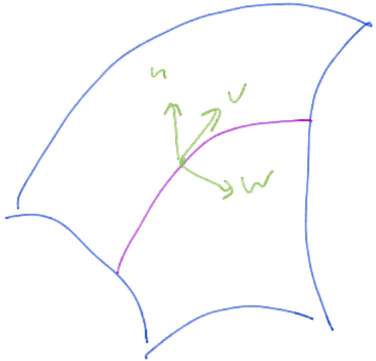
Формулы типа Френе (задача)

Пусть $\gamma = \gamma(t)$ — натурально параметризованная кривая на поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Для каждого t рассмотрим положительно ориентированный ортонормированный базис v, w, n, где $v = \gamma'(t)$, w дополняет w до базиса $T_{\gamma(t)}M$, n — нормаль поверхности в точке $\gamma(t)$.

Тогда
$$\begin{cases} v' = \kappa_g w + \kappa_n n \\ w' = -\kappa_g v + \tau_g n \\ n' = -\kappa_n v - \tau_g w \end{cases}$$
где κ_n и κ_g — нормальная и геодезическая кривизна кривой, $\tau_g = \mathbf{II}(v, w)$.

Примечание: τ_g называется геодезическим кручением.

Функции κ_g, κ_n, τ_g обращаются в 0 тогда и только тогда, когда γ — геодезическая, асимптотическая линия или линия кривизны соответственно.



Для записей

Содержание

Выпуклые поверхности

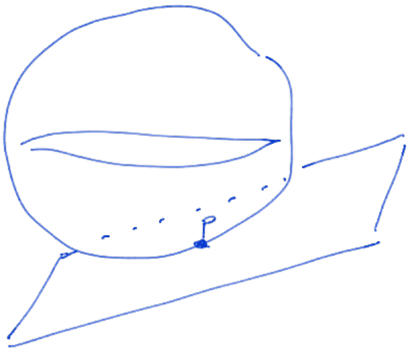
Пусть $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — компактная гладкая гиперповерхность.

Определение

M — **выпуклая поверхность**, если она лежит по одну сторону от любой своей аффинной касательной гиперплоскости.

Задача

Определение эквивалентно тому, что M — (гладкая) граница выпуклого тела.



Кривизна выпуклой поверхности

Для удобства рассматриваем только случай $M^2 \subset \mathbb{R}^3$.
В старших размерностях всё аналогично, но формулировки более громоздкие.

Теорема

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — компактная связная гиперповерхность, K — её гауссова кривизна (это функция на M). Тогда

1. *Если M выпуклая, то $K \geq 0$ всюду на M.*
2. *Если $K > 0$ всюду на M, то M выпуклая.*

Замечание

На самом деле вторая часть верна и при $K \geq 0$.
Доказывать это не будем.

Выпуклые поверхности с $K > 0$ называются строго выпуклыми.

Доказательство — 1

Общее наблюдение: K не зависит от выбора направления нормали (при замене нормали на противоположную $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ обе меняют знак).

Доказываем первую часть.

Пусть M выпуклая, $p \in M$.

Направим нормаль $n(p)$ в то полупространство относительно T_pM, которое содержит M.

Для удобства считаем, что $p = 0$. Пусть M в окрестности p — график функции $f\colon T_pM \to \mathbb{R}$.

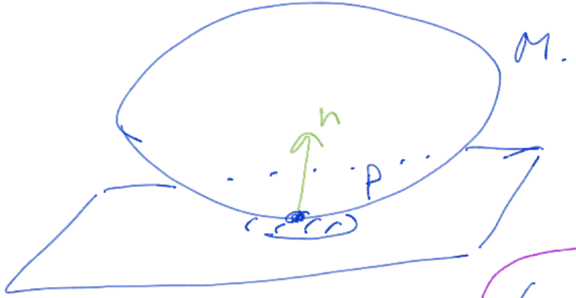
Тогда f достигает минимума в точке p

$\implies$ $d_0^2 f$ неотрицательно определена

$\implies$ (так как $\mathbf{II} = d_0^2 f$) $\mathbf{II}$ неотрицательно определена

$\implies$ $\varkappa_1, \varkappa_2 \geq 0 \implies K \geq 0$.

Первая часть доказана



$(p=0)$
$T_pM = (x\ y)$
$n = e_3$

M - график
$f\colon U \subset T_pM \to \mathbb{R}$

p - arg min f
$p = 0$

$\Rightarrow d_0^2 f \geq 0.$

$\Rightarrow k_1, k_2 \geq 0 \Rightarrow K \geq 0.$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Доказательство — 2

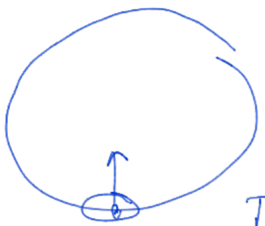
Доказываем вторую часть

Случай $K > 0$.

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — компактная

1. Существует глобальное гауссово отображение $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ (т.е. M ориентируема).

   Доказательство: $K > 0 \implies \mathbf{II}$ знакоопределена. Направим нормаль в каждой точке так, чтобы $\mathbf{II}$ была положительна.



$\mathrm{II} > 0$.

Доказательство — 2

Доказываем вторую часть

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — компактная

1. Существует глобальное гауссово отображение $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ (т.е. M ориентируема).

   Доказательство: $K > 0 \implies \mathbf{II}$ знакоопределена. Направим нормаль в каждой точке так, чтобы $\mathbf{II}$ была положительна.

2. $K > 0 \implies \mathbf{II}$ невырождена $\implies -S = dn$ — невырожденный оператор $\implies$ n — локальный диффеоморфизм. $\checkmark$

$n: M \to S^2$.

$\mathrm{II} \sim -S = -dn$.

$\forall p \quad d_p n: T_p M \to T_{n(p)} S^2$

Доказываем вторую часть

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — компактная

1. Существует глобальное гауссово отображение $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ (т.е. M ориентируема).

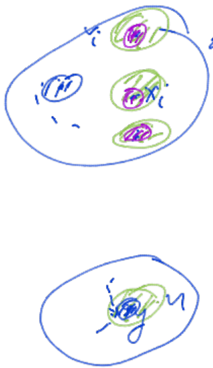
   Доказательство: $K > 0 \implies$ **II** знакоопределена. Направим нормаль в каждой точке так, чтобы **II** была положительна.

2. $K > 0 \implies$ **II** невырождена $\implies -S = dn$ — невырожденный оператор $\implies$ n — локальный диффеоморфизм.

3. n — локальный гомеоморфизм, M компактна $\implies$ n — накрытие.

U заменим на $B_r(y)$:

$r < d(y, f(X - \cup V_i))$.



X — комп. хаусд. метризуемо.

$\downarrow f$ — лок. гомеом

Y

$\boxed{\forall y \ \exists U \ni y \quad f^{-1}(U) = \sqcup V_i \ldots}$

X — комп + лок гомеом $\implies$ $|f^{-1}(y)| < \infty$.

(иначе $\exists$ предельная точка, в ней нарушается лок. гомеом.

Доказательство — 2

Доказываем вторую часть

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — компактная

1. Существует глобальное гауссово отображение $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ (т.е. M ориентируема).

   Доказательство: $K > 0 \implies$ **II** знакоопределена. Направим нормаль в каждой точке так, чтобы **II** была положительна.

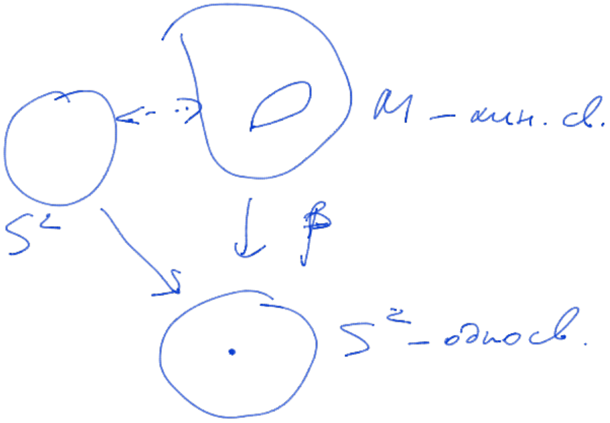
2. $K > 0 \implies$ **II** невырождена $\implies -S = dn$ — невырожденный оператор $\implies$ n — локальный диффеоморфизм.

3. n — локальный гомеоморфизм, M компактна $\implies$ n — накрытие.

4. $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ — накрытие, $\mathbb{S}^2$ односвязна $\implies$ n — гомеоморфизм.

M мин. св.

$\text{II}(x,y) = k_1x^2 + k_2y^2.$



$p_*: \pi_1(M) \to \pi_1(S^2)$

— инъективно.

$\Rightarrow \pi_1(M) = \{e\} \Rightarrow M$ — однсв.

$\Rightarrow p$ — унив. накр. $\Rightarrow$ гомеом.

Доказательство — 3

Так как n — гомеоморфизм, каждое значение n реализуется ровно в одной точке

$\Longrightarrow$ для каждого двумерного направления есть ровно две касательные плоскости этого направления

$\Longrightarrow$ M лежит по одну сторону от любой касательной плоскости (так же, как в двумерном случае).

Теорема доказана

от противного