Содержание

Якобиан отображения между поверхностями

Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ — подмногообразия одинаковой размерности m, $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое.

Определение

Якобиан f в точке $p \in M_1$ — такое $c \geq 0$, что отображение $d_pf\colon T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ умножает все объемы на c:

$$\mathrm{Vol}(d_pf(V)) = c\,\mathrm{Vol}(V)$$

для любого измеримого $V \subset T_pM_1$, где Vol — m-мерный евклидов объем.
(Такое число существует, так как d_pf линейно.)

Обозначение: $c = Jf(p)$.

Замечание

$Jf(p)$ равно модулю определителя матрицы d_pf в любых ортонормированных базисах T_pM_1 и $T_{f(p)}M_2$.

$d_pf: T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ — лин.

$\langle , \rangle$ $\langle , \rangle$

$\exists\ c = c(f, p).$

$\forall\ A \subset T_pM_1$

$\mathrm{Vol}(d_pf(A)) = c \cdot \mathrm{Vol}(A)$

$c = Jf(p) \geq 0.$

Формула площади

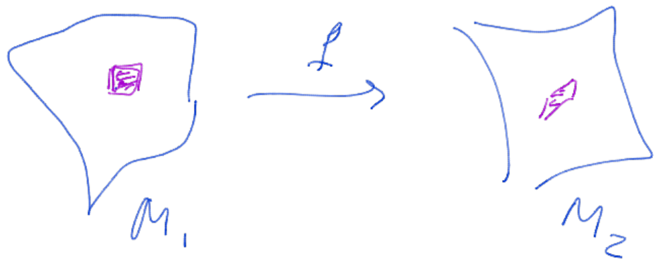
Теорема

Пусть $f : M_1 \to M_2$ — *диффеоморфизм. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M_2) = \int_{M_1} Jf(x)\, d\,\mathrm{Vol}(x)$$

Доказательство.

Из анализа. $\square$



Якобиан гауссова отображения

Для упрощения формул рассматриваем только 2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$.

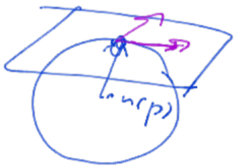
Теорема

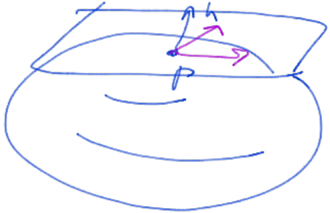
Для любой ориентируемой поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ якобиан гауссова отображения $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ равен $|K|$.

Доказательство.

После естественного отождествления T_pM и $T_{n(p)}\mathbb{S}^2$ и выбора базиса из собственных направлений dn становится оператором $-S$ с матрицей $\begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$. Якобиан Jn — модуль её определителя. □

$n: M \to S^2$





$M^2 \subset \mathbb{R}^3$

$Jn = K$

$-d_p n = S: T_pM \to T_{n(p)}S^2$

$S: T_pM \circlearrowleft$

$$J_n = \left|\det\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}\right| = |k_1 k_2| = |K|$$

Интеграл K по выпуклой поверхности

Будем обозначать 2-мерный объем (площадь) буквой A. Area.

Следствие

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — строго выпуклая поверхность. Тогда

$$\int_M K\,dA = 4\pi$$

Доказательство.

Из строгой выпуклости, $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ — диффеоморфизм. По формуле площади,

$$A(\mathbb{S}^2) = \int_M Jn\,dA = \int_M K\,dA$$

где Jn — якобиан n. С другой стороны, $A(\mathbb{S}^2) = 4\pi$. □

Формула Гаусса-Бонне (информация)

Информация

Для любой компактной поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$,

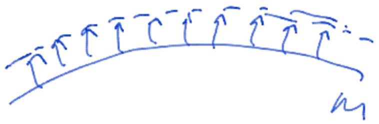
$$\int_M K\, dA = \underline{2\pi \cdot \chi(M)},$$

где χ — эйлерова характеристика.

$$\int K = -4\pi$$

Для записей

Содержание



Параллельные поверхности

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — ориентируемая поверхность.
Пусть выбрано направление нормали и число $a \in \mathbb{R}$.
Определим $f_a \colon M \to \mathbb{R}^3$:

$$f_a(p) = p + a \cdot n(p), \qquad p \in M,$$

где $+$ — откладывание вектора от точки в $\mathbb{R}^3$.
Положим $M_a = f_a(M)$.

Теорема

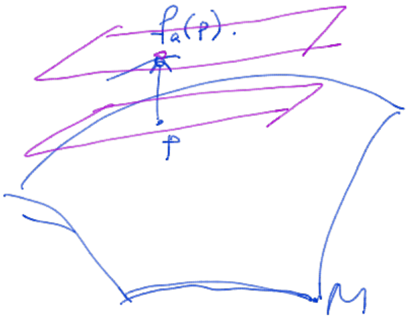
Если M компактна и $|a|$ достаточно мало, то

1. *M_a — гладкая поверхность.* (подмн-е).
2. *Касательная плоскость M_a в точке $f_a(p)$ параллельна T_pM.*
3. *Площадь M_a равна*

$$\boxed{A(M_a) = A(M) - 2a\int_M H\,dA + a^2\int_M K\,dA,}$$

где K и H — гауссова и средняя кривизна M.

$a \in \mathbb{R}$



что даже выпуклых.

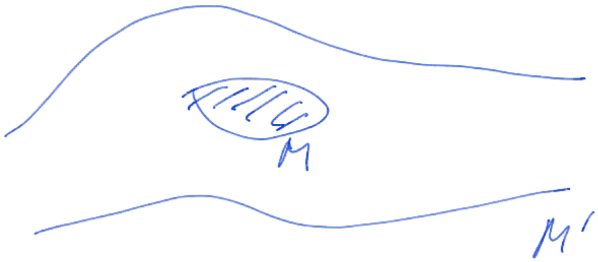
Комментарии к формулировке

Замечание

Условия на M и a можно ослабить:

- Компактность можно заменить на условие: «замыкание M в $\mathbb{R}^3$ компактно и содержится в некоторой гладкой поверхности M'».
- Если M выпукла и нормаль направлена внутрь, то теорема верна для любого $a < 0$ (т.е. для отступа наружу).

Это будет ясно из доказательства теоремы.



Замечание

При отступании от выпуклой поверхности наружу слагаемое $-2a \int_M H\,dA$ положительно.

Доказательство теоремы — 1

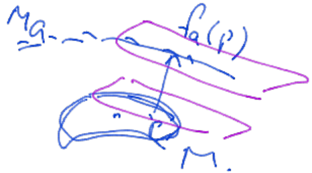
Сначала докажем теорему локально

1 шаг. Дифференцируем $f_a\colon M \to \mathbb{R}^3$ в точке $p \in M$ вдоль $v \in T_pM$:

$$\boxed{d_pf_a(v) = v + a\,d_pn(v) = v - a\,S(v).}$$

Оба вектора v и $S(v)$ лежат в T_pM (как векторы из $\mathbb{R}^3$).

$\implies$ $d_pf_a(v)$ — оператор из T_pM в себя.



$f_a(p) = p + a\cdot n(p)$

$d_pf_a : T_pM \circlearrowleft$

Доказательство теоремы — 1

Сначала докажем теорему локально

1 шаг. Дифференцируем $f_a \colon M \to \mathbb{R}^3$ в точке $p \in M$ вдоль $v \in T_pM$:

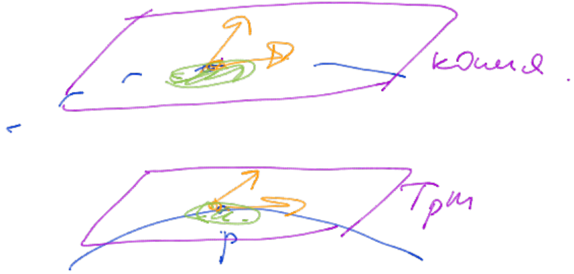
$$d_pf_a(v) = v + a\, d_pn(v) = v - a\, S(v).$$

Оба вектора v и $S(v)$ лежат в T_pM (как векторы из $\mathbb{R}^3$).
$\implies$ $d_pf_a(v)$ — оператор из T_pM в себя.

В базисе из главных направлений его матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 - a\kappa_1 & 0 \\ 0 & 1 - a\kappa_2 \end{pmatrix}$.
$\implies$ она невырождена, если $a \notin \{1/\kappa_1, 1/\kappa_2\}$.

Считаем, что $|a| < \sup\{\kappa_i\}$, где супремум берётся по всем точкам поверхности. Тогда f_a — погружение, образ d_pf равен (параллелен) T_pM, а якобиан равен $(1 - a\kappa_1)(1 - a\kappa_2) = 1 - 2aH + a^2K$.

Отсюда следует теорема для любой части поверхности M, на которой погружение f_a является вложением.



$f_a \colon M \to \mathbb{R}^3$ — погружение.

$$A(M_a) = \int (1 - 2aH + a^2K)\, dA_M$$

$$= A(M) - 2a\int_M H\, dA + a^2 \int_M K.$$

$|a| < \inf\{|k_i|^{-1}\}$

Доказательство теоремы — 2

Докажем, что f_a — вложение, если $|a|$ достаточно мало
Определим $F\colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ равенством

$$F(p, a) = p + an(p).$$

В точке $(p, 0)$ дифференциал $d_{(p,0)}F$ невырожден
$\implies$ применима теорема об обратной функции
$\implies$ есть окрестность $U_p \subset M$ точки p и $\delta_p > 0$ такие, что сужение F на $U_p \times (-\delta_p, \delta_p)$ — диффеоморфизм на открытую область в $\mathbb{R}^3$.

Упр. $\forall$ мн-ий M, N.

$$T_{(p,q)}(M \times N) \simeq T_pM \times T_qM.$$

$$T(M \times N) \simeq TM \times TN$$

$$T_{(p,0)}(M \times \mathbb{R}) = T_pM \times \mathbb{R}$$

Доказательство теоремы — 2

Докажем, что f_a — вложение, если $|a|$ достаточно мало

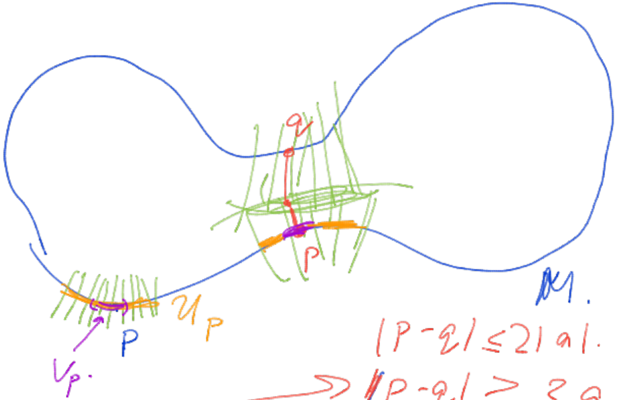
Определим $F\colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ равенством

$$\boxed{F(p,a) = p + an(p).}$$

В точке $(p,0)$ дифференциал $d_{(p,0)}F$ невырожден

$\Longrightarrow$ применима теорема об обратной функции

$\Longrightarrow$ есть окрестность $U_p \subset M$ точки p и $\delta_p > 0$ такие, что сужение F на $U_p \times (-\delta_p, \delta_p)$ — диффеоморфизм на открытую область в $\mathbb{R}^3$.



$|p-q| \le 2|a|$.

$\Rightarrow |p-q| > 2a$

Выберем подокрестность $V_p \Subset U_p$ (знак $\Subset$ означает «содержится вместе с компактным замыканием»), выберем конечное подпокрытие $\{V_{p_i}\}$ и потребуем, что $|a| < \min\{\delta_{p_i}\}$ и $|a| < \min_i \operatorname{dist}(V_{p_i}, M \setminus U_{p_i})/2$.

Тогда F инъективно на $M \times [-a,a]$

$\Longrightarrow$ сужение F инъективно на $M \times [-a,a]$

$\Longrightarrow$ f_a инъективно как сужение на $M \times \{a\}$

$\Longrightarrow$ оно вложение (в силу компактности).

$F(p,a) = F(q,b)$

(1) $\exists\, i:\ p,q \in U_{p_i}$

– противоречит выбору U_i.

(2) $p \in V_{p_i}$, $q \in U_{p_i}$

Минимальные поверхности (информация)

Определение

Поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — минимальная, если у нее средняя кривизна H равна 0 во всех точках.

Информация

Минимальные поверхности возникают при решении задачи Плато: найти поверхность минимальной площади с наперёд заданным краем.

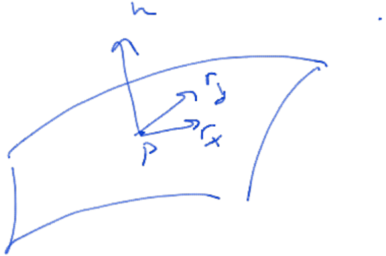
Условие $H \equiv 0$ — необходимое для минимизации площади (это проверяется аналогично доказанному). Оно достаточное для маленьких частей поверхности.

$$A(M_a) = \underbrace{2a\int H}_{} + \dots$$

$H \equiv 0$

Для записей

Содержание



Определение

Пусть $r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ — простая регулярная поверхность, $M = r(U)$, $x \in U$, $p = r(x)$, (x_i) — координаты в U. Размерности любые.

Определение

Для $i, j \in \{1, \ldots m\}$ определим $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(x) \in T_pM$:

$$\boxed{\Gamma_{ij} = \Pr_{T_pM}(r_{x_i x_j}),}$$

где $\Pr_{T_pM}$ — ортогональная проекция на T_pM.

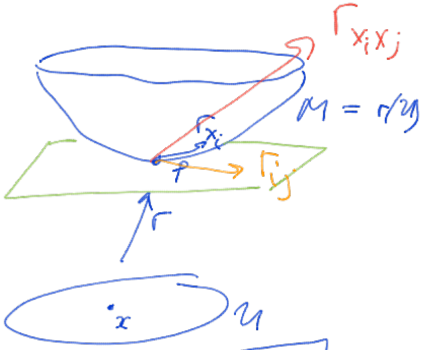
Символы Кристоффеля 1-го рода Γ_{ij}^k, $k \in \{1, \ldots, m\}$ — коэффициенты вектора Γ_{ij} в разложении по базису (r_{x_k}).

Разложение: $\Gamma_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k r_{x_k}$. r_{x_k}

Символы Кристоффеля 2-го рода: $\Gamma_{ij,k} = \langle \Gamma_{ij}, r_{x_k} \rangle$.

Замечание

Они симметричны: $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$.



$$\boxed{r_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}}$$

базис T_pM: $(r_{x_1}, \ldots, r_{x_m})$

$d_x r\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$.

$(e_1, \ldots, e_m) \mapsto (r_{x_1}, \ldots, r_{x_m})$.

Вычисление одних через другие

Свойство

Символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода выражаются друг через друга и коэффициенты $\mathbf{I}$.

Доказательство.

Зафиксируем i, j и рассмотрим векторы-столбцы
$X = (\Gamma_{ij}^k)_{k=1}^m$ и $Y = (\Gamma_{ij,k})_{k=1}^m$.
Тогда верно матричное равенство: $Y = \mathbf{I}X$.
Она выражает $\Gamma_{ij,k}$ через Γ_{ij}^k.
Обратно, $X = \mathbf{I}^{-1}Y$. □

$$\begin{pmatrix}\langle \Gamma_{ij}, \Gamma_{x_1}\rangle \\ \vdots \\ \langle \Gamma_{ij}, \Gamma_{x_m}\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & I & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{ij}\\ \vdots \\ \Gamma^m_{ij}\end{pmatrix}$$

Выражение через первую форму

Теорема

Символы Кристоффеля выражаются через коэффициенты первой формы и их первые производные.

Следствие

Символы Кристоффеля принадлежат внутренней геометрии (не меняются при изометриях).

Замечание

Символы Кристоффеля зависят от выбора параметризации r и не имеют простого бескоординатного смысла.

Доказательство теоремы

Обозначаем коэффициенты I через (g_{ij}), $g_{ij} = \langle r_{x_i}, r_{x_j}\rangle$.
Дифференцируем g_{ij} по x_k:

$$(g_{ij})'_{x_k} = \langle r_{x_i}, r_{x_j}\rangle'_{x_k} = \langle r_{x_i x_k}, r_{x_j}\rangle + \langle r_{x_i}, r_{x_j x_k}\rangle = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

Аналогично,

$$(g_{ik})'_{x_j} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j}$$
$$(g_{jk})'_{x_i} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{jk,i}$$

(переставляем индексы и пользуемся симметрией $\Gamma_{ij,k}$).

Складываем два последних равенства, вычитаем первое, делим на 2:

$$\boxed{\Gamma_{ij,k} = \frac{(g_{ik})'_{x_j} + (g_{jk})'_{x_i} - (g_{ij})'_{x_k}}{2}}$$

Выразили $\Gamma_{ij,k}$, а Γ^k_{ij} выражаются через них и g_{ij}. □

(1)

(2) $j \leftrightarrow k$

(3) $i \leftrightarrow k$.

$x = \Gamma_{ik,j}$

$y = \Gamma_{jk,i}$

$z = \Gamma_{ij,k}$

$$\begin{cases} x + y = \dots \\ y + z = \dots \\ x + z = \dots \end{cases}$$

(*). $(2)+(3)-(1)$

Для записей

Содержание

Рассматриваем m-мерные поверхности в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема

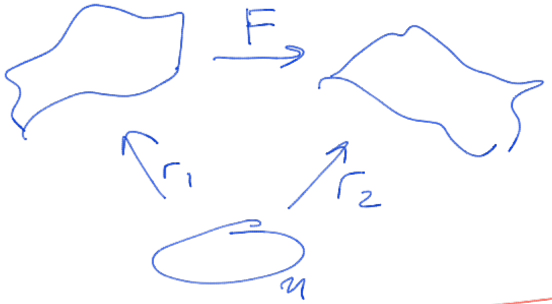
Поверхность определяется своей первой и второй формой однозначно с точностью до движения.

Подробнее: $\subset \mathbb{R}^m$

Пусть $r_1, r_2\colon U \cancel{\subset} \mathbb{R}^{m+1}$ — регулярные поверхности, U связна, и в каждой точке $x \in U$ первая и вторая форма r_1 — такие же, как у r_2. Тогда существует движение $F\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ такое, что $r_2 = F \circ r_1$.

Замечание

Неверно, что любая пара матричных функций на U реализуется как **I** и **II** некоторых поверхностей.
Даже если выполнены все поточечные условия (симметричность, положительная определённость **I**).



$\boxed{r_1, r_2 : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}}$

$U \to \mathbb{R}^{m+1}$

$\mathbb{R}^m$

V.

Доказательство теоремы – 1: деривационные уравнения

Пусть r — одна из данных поверхностей. Напишем дифференциальные уравнения на векторнозначные функции $\underbrace{X_i = r_{x_i}}$ и $\underline{n}$ (нормаль) из U в $\mathbb{R}^{m+1}$.

$$(X_i)'_{x_j} = \underline{r_{x_i x_j}} = \underbrace{\Gamma_{ij}}_{\Gamma\text{кас.}} + \widehat{\mathbf{II}}(X_i, X_j) \cdot n = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k X_k} + \underbrace{h_{ij} n} \quad (*).$$

где (h_{ij}) — коэффициенты $\mathbf{II}$.

$$n'_{x_j} = -S(X_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \quad (**)$$

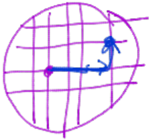
где $S = -dn$ — оператор Вейнгартена, $\underline{(a_{ij})} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}$ — его матрица в базисе (X_i).

Это линейная система дифференциальных уравнений $\implies$ решение однозначно определяется начальными данными $(X_i(x_0))$, $n(x_0)$ для произвольной $x_0 \in U$.

$$\langle r_{x_i x_j}, n\rangle = \mathrm{II}(e_i, e_j) = \widehat{\mathrm{II}}(r_{x_i}, r_{x_j}\rangle$$

$$h_{ij} = \mathrm{II}(e_i, e_j).$$

$$X_1, \dots, X_m, n : U \to \mathbb{R}^{m+1}$$



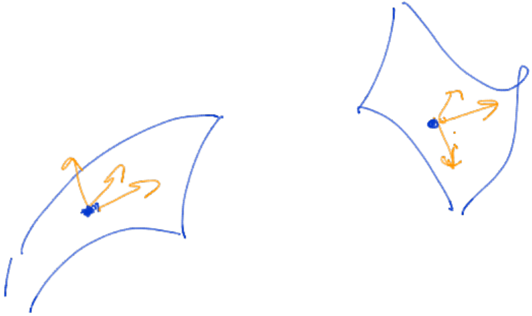
$$\begin{cases} (X_i)'_{x_j} = \dots \\ n'_{x_j} = \dots \end{cases}$$

Доказательство теоремы – 2: окончание

Построим движение $F\colon \mathbb{R}^{m+1}$ такое, что

- $F(r_1(x_0)) = r_2(x_0)$
- $\overrightarrow{F}$ переводит базис $(r_1)_{x_1}, \dots, (r_1)_{x_m}, n_{r_1}$ в аналогичный базис для r_2.

$F\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$



Это возможно, так как у двух базисов одинаковые матрицы Грама.

Теперь у двух поверхностей $F \circ r_1$ и r_2 одинаковые начальные данные деривационных уравнений.

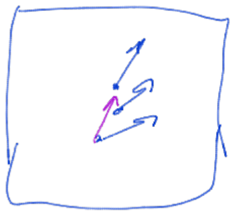
Коэффициенты уравнений Γ^k_{ij}, h_{ij}, a_{ij} тоже одинаковы $\Longrightarrow$ решения совпадают.

Теперь уравнение $r_{x_i} = X_i$, где X_i даны, однозначно определяет поверхность.

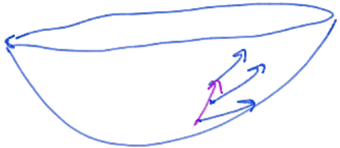
Теорема доказана

Для записей

Содержание



$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Касательные векторные поля

Снова рассматриваем любые размерности

Определение

Пусть M — гладкое многообразие.
(Касательное) векторное поле на M — гладкое отображение $V\colon M \to TM$ такое, что $V(p) \in T_pM$ для всех $p \in M$.

Обозначение: вместо $V(p)$ часто пишут V_p.

Ковариантная производная векторного поля

Пусть $M^m \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое подмногообразие.

Определение

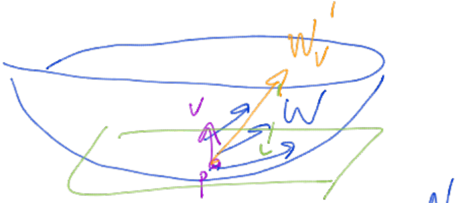
Пусть W — векторное поле на M, $p \in M$, $v \in T_pM$.
Ковариантная производная W вдоль v — вектор $\nabla_v W \in T_pM$, определяемый равенством

$$\boxed{\nabla_v W = \mathrm{Pr}_{T_pM}(W'_v)}$$

где W'_v — производная вдоль v поля W, рассматриваемого как отображение из M в $\mathbb{R}^N$, Pr_{T_pM} — ортогональная проекция на T_pM.

Определение

Для векторных полей V и W, ковариантная производная $\nabla_V W$ — векторное поле, определяемое равенством $(\nabla_V W)_p = \nabla_{V_p} W$, где нижний индекс p обозначает значение в точке p.



$W: M \to \mathbb{R}^N$

$W'_w \in \mathbb{R}^N$

∇ — "набла".

V.

$V_p = V(p)$

$TM \hookrightarrow T\mathbb{R}^N$

гладкое

$T\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \xrightarrow[pr_2]{} \mathbb{R}^N$

Свойства ∇

1. Если X_i — координатные поля параметризации r (т.е. $X_i(p) = r_{x_i}(r^{-1}(p))$), то $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}$.

$$\Gamma_{ij} = Pr_{TM}(r_{x_i x_j})$$

Свойства ∇

1. Если X_i — координатные поля параметризации r (т.е. $X_i(p) = r_{x_i}(r^{-1}(p))$), то $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}$.
2. Операция ∇ линейна по обоим аргументам.

$\nabla_V W$ — линейно по V и W

Свойства ∇

1. Если X_i — координатные поля параметризации r (т.е. $X_i(p) = r_{x_i}(r^{-1}(p))$), то $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}$.
2. Операция ∇ линейна по обоим аргументам.
3. Дифференцирование произведения:

$$\nabla_v(fW) = f'_v \cdot W(p) + f(p) \cdot \nabla_v W$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_V(fW) = f'_V \cdot W + f \cdot \nabla_V W$$

для любой гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$.

W - вект. поле

f - функция

$$(fW)'_v = \underbrace{f'_v \cdot W(p)}_{p\,\Gamma} + f(p) \cdot \underbrace{W'_v}_{\nabla_v W}$$

1. Если X_i — координатные поля параметризации r (т.е. $X_i(p) = r_{x_i}(r^{-1}(p))$, то $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}$.
2. Операция ∇ линейна по обоим аргументам.
3. Дифференцирование произведения:

$$\nabla_v(fW) = f'_v \cdot W(p) + f(p) \cdot \nabla_v W$$

$$\nabla_V(fW) = f'_V \cdot W + f \cdot \nabla_V W$$

для любой гладкой функции $f \colon M \to \mathbb{R}$.

4. Дифференцирование скалярного произведения

$$\langle W_1, W_2 \rangle'_v = \langle \nabla_v W_1, W_2(p) \rangle + \langle W_1(p), \nabla_v W_2 \rangle \qquad (1)$$

$$\langle W_1, W_2 \rangle'_V = \langle \nabla_V W_1, W_2 \rangle + \langle W_1, \nabla_V W_2 \rangle \qquad (2)$$

для любых векторных полей W_1, W_2.

Доказательство: $\langle \nabla_v W_1, W_2 \rangle = \langle (W_1)'_v, W_2 \rangle$, так как $(W_1)'_v - \nabla_v W_1 \perp T_p M \ni W_2(p)$.
Аналогично для второго слагаемого.

W_1, W_2 — вект.

$\langle W_1, W_2 \rangle$ — функция $M \to \mathbb{R}$

$\ldots = \langle (W_1)'_v, \underline{\underline{W_2}} \rangle + \langle W_1, (W_2)'_v \rangle$

Выражение ∇ через символы Кристоффеля

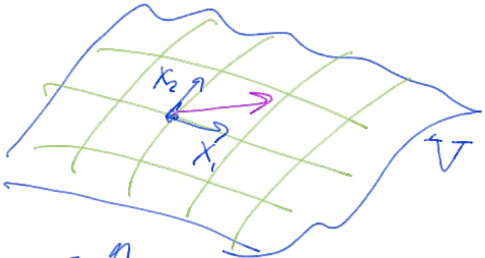
Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — координатные векторные поля. Данные поля можно разложить по координатным:

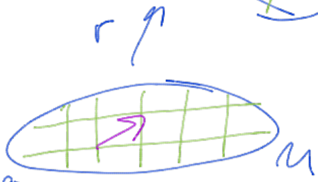
$$V = \sum_{i=1}^m \xi_i X_i\,,$$
$$W = \sum_{i=1}^m \eta_i X_i\,,$$

где ξ_i, η_i — гладкие функции.

$\xi_1, \ldots, \xi_m$

$\eta_1, \ldots, \eta_m$





$\tilde{\nabla}$ $\quad X_i = r_{x_i}$

Теорема

В этих обозначениях,

$$\nabla_V W = \sum_i (\eta_i)'_V X_i + \underbrace{\sum_{i,j} \xi_i \eta_j \Gamma_{ij}}.$$

Как следствие, операция ∇ принадлежит внутренней геометрии.

$\Gamma(V,W)$.

координатные производные

$\tilde{\nabla}(x) =$
$= \big(\xi_1(r(x)), \ldots, \xi_m(r(x))\big)$

значение в p зависит только от $V(p)$, $W(p)$, билинейно.

$T_pM \times T_pM \to T_pM$.

Доказательство теоремы

Пользуемся линейностью и дифференцированием произведения:

$$\nabla_V W = \nabla_V \left(\sum_i \eta_i X_i \right) = \overbrace{\sum_i (\eta_i)'_V X_i}^{1} + \overbrace{\sum_i \eta_i \nabla_V X_i}^{2}$$

Первое слагаемое входит в ответ, преобразуем второе, подставив $V = \sum_j \xi_j X_j$:

$$\nabla_V X_i = \nabla_{\sum_j \xi_j X_j} X_i = \sum_j \xi_j \nabla_{X_j} X_i = \sum \xi_j \Gamma_{ji}$$

$$\Gamma_{ij} = \nabla_{X_i} X_j$$

Умножая на η_i и суммируя по i, получаем вторую часть ответа:

$$\boxed{\sum_i \eta_i \nabla_V X_i = \sum_{i,j} \eta_i \xi_j \Gamma_{ji}}$$

(с точностью до переобозначения i и j).