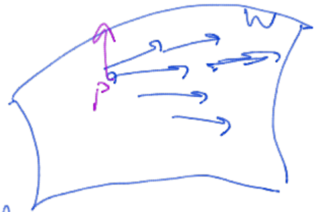
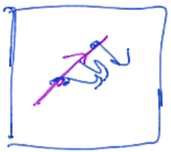
Что было в прошлый раз

- Оператор ∇ для дифференцирования касательных векторных полей на поверхности $M^m \subset \mathbb{R}^N$.
- Для него верны обычные свойства дифференцирования
- Он принадлежит внутренней геометрии (так как выражается через символы Кристоффеля)



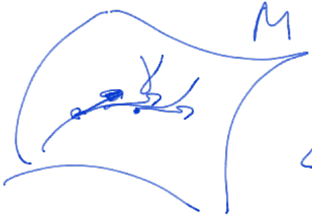


$M \subset \mathbb{R}^N$

$$\boxed{\nabla_v W = pr_{TM}(W'_v).}$$

Следствие

Геодезические принадлежат внутренней геометрии, т.е. при изометриях геодезические переходят в геодезические.



γ - геод $\iff$ $\gamma'' \perp TM$

$\iff pr_{TM}(\gamma'') = 0$

$\quad\;\; \| $

$\quad \nabla_{\gamma'}\gamma'$

Доказательство.

Натурально параметризованная кривая γ — геодезическая $\iff$ $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. □

Содержание

Теорема Гаусса

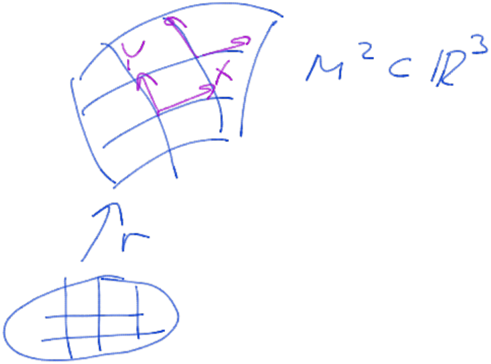
Рассматриваем 2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Теорема

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность, r — её параметризация, X и Y — координатные векторные поля. Тогда её гауссова кривизна K удовлетворяет равенству

$$K = \frac{\langle \nabla_X (\nabla_Y Y) - \nabla_Y (\nabla_X Y), X\rangle}{\det \mathrm{I}}$$

$$\langle [\nabla_X, \nabla_Y] Y, X \rangle$$



Теорема Гаусса

Рассматриваем 2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Теорема

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность, r — её параметризация, X и Y — координатные векторные поля. Тогда её гауссова кривизна K удовлетворяет равенству

$$K = \frac{\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X\rangle}{\det \mathrm{I}}$$

Следствие (Theorema Egregium)

K сохраняется при изометриях. (изгибаниях).

Подробнее: K выражается через коэффициенты первой формы и их первые и вторые производные.

Доказательство.

Подставим выражение ∇ через Γ_{ij}^k. □

$$\boxed{\nabla_Y Y = \Gamma_{22} = \Gamma_{22}^1 X + \Gamma_{22}^2 Y}$$

$$Y_r = r_y$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\nabla_Y Y = \mathrm{pr}_{T_n}(r_{yy}) = \Gamma_{22}$$

$$\nabla_X \nabla_Y Y = \nabla_X\left(\Gamma_{22}^1 X + \Gamma_{22}^2 Y\right) =$$

$$= \left(\Gamma_{22}^1\right)'_x \cdot X + \Gamma_{22}^1 \cdot \Gamma_{11} +$$

$$+ \left(\Gamma_{22}^2\right)'_x \cdot Y + \Gamma_{22}^2 \cdot \Gamma_{12}$$

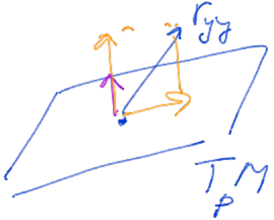
$$\langle -\|-, X\rangle = \left(\Gamma_{22}^1\right)'_x E + \Gamma_{22}^1 \cdot \Gamma_{11,1} + \ldots$$

Преобразуем первое слагаемое $\nabla_X \nabla_Y Y$:

$$\nabla_Y Y = \Pr_{TM}(r_{yy}) = r_{yy} - \mathbf{II}(Y, Y) \cdot n \qquad (*)$$

$$\nabla_X \nabla_Y Y = \Pr_{TM}((\nabla_Y Y)'_x) = \Pr_{TM}(r_{yyx}) + \mathbf{II}(Y, Y) \cdot S(X) \qquad (**).$$

так как $n'_x = -S(X) \in TM$, а у слагаемого $\mathbf{II}(Y, Y)'_x \cdot n$ проекция равна 0.



$$\hat{\mathbb{I}}(Y,Y) = \mathbb{I}(e_2, e_2) = \langle r_{yy}, n\rangle$$

$$n'_x = dn(X) = -S(X)$$

$$\Pr_{TM}\left((r_{yy} - \mathbb{I}(Y,Y) \cdot n)'_x\right) =$$

$$+ \Pr_{TM}\left((\mathbb{I}(Y,Y))'_x \cdot n\right) = 0$$

$$= \Pr_{TM}\left(r_{yyx} - (\mathbb{I}(Y,Y))'_x \cdot n - \mathbb{I}(Y,Y) \cdot \underbrace{n'_x}_{= -S(X)}\right) =$$

$\downarrow$ ответ

Доказательство теоремы

Преобразуем первое слагаемое $\nabla_X \nabla_Y Y$:

$$\nabla_Y Y = \mathrm{Pr}_{TM}(r_{yy}) = r_{yy} - \mathbf{II}(Y, Y) \cdot n$$

$$\nabla_X \nabla_Y Y = \mathrm{Pr}_{TM}((\nabla_Y Y)'_x) = \mathrm{Pr}_{TM}(r_{yyx}) + \mathbf{II}(Y, Y) \cdot S(X)$$

так как $n'_x = -S(X) \in TM$, а у слагаемого $\mathbf{II}(Y, Y)'_x \cdot n$ проекция равна 0.

Аналогично

$$\nabla_Y \nabla_X Y = \mathrm{Pr}_{TM}(r_{yxy}) + \mathbf{II}(X, Y) \cdot S(Y)$$

$$\nabla_X Y = r_{yx} - \mathbf{II}(X, Y) \cdot n$$

$$\nabla_Y \nabla_X Y = \mathrm{pr}_{TM}\left(\left(r_{yx} - \mathbf{II}(X, Y) \cdot n\right)'_y\right)$$

$$= \mathrm{pr}_{TM}\left(r_{yxy} - \underbrace{(\mathbf{II}(X, Y))'_y \cdot n}_{\to 0} - \mathbf{II}(X, Y) \cdot \underbrace{n'_y}_{-S(Y)}\right)$$

$$= \mathrm{pr}_{TM}(r_{yxy}) + \mathbf{II}(X, Y) \cdot S(Y)$$

Доказательство теоремы

Преобразуем первое слагаемое $\nabla_X \nabla_Y Y$:

$$\nabla_Y Y = \mathrm{Pr}_{TM}(r_{yy}) = r_{yy} - \mathbf{II}(Y, Y) \cdot n$$

$$\nabla_X \nabla_Y Y = \mathrm{Pr}_{TM}((\nabla_Y Y)'_x) = \cancel{\mathrm{Pr}_{TM}(r_{yyx})} + \mathbf{II}(Y, Y) \cdot S(X) \quad (1)$$

так как $n'_x = -S(X) \in TM$, а у слагаемого $\mathbf{II}(Y, Y)'_x \cdot n$ проекция равна 0.

Аналогично

$$\nabla_Y \nabla_X Y = \cancel{\mathrm{Pr}_{TM}(r_{yxy})} + \mathbf{II}(X, Y) \cdot S(Y) \quad (2)$$

Вычитаем и пользуемся симметрией 3-х производных:

$$\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y = \mathbf{II}(Y, Y) \cdot S(X) - \mathbf{II}(X, Y) \cdot S(Y) \quad (3)$$

Умножаем скалярно на X, вспомнив, что $\mathbf{II} = \langle S(\cdot), \cdot \rangle$:

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle = \mathbf{II}(Y, Y)\mathbf{II}(X, X) - \mathbf{II}(X, Y)^2 \quad (4)$$
$$= \det \mathbf{II} = K \det \mathbf{I}$$

Теорема доказана

$\langle S(X), X \rangle = \mathrm{II}(X, X).$

$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

$N \cdot L - M^2$

$\boxed{K = \dfrac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}}}$

$\therefore$

Пример

Не существует поверхности $r\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ с

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{const.}$$

во всех точках. Такая поверхность была бы локально изометрична $\mathbb{R}^2$, но $K \neq 0$, противоречие.

$(1)\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M$ – лок. изом. пл-ти.

$\Rightarrow K = 0.$

$(2) \Rightarrow K = \dfrac{\det II}{\det I} = 1.$

Информация

Для существования поверхности с заданными **I** и **II** необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дифференциальные уравнения, называемые уравнениями Гаусса-Петерсона-Кодацци или Гаусса-Кодацци-Майнарди.
Уравнения происходят из симметрий третьих производных r и вторых производных n.
Выписывать их не будем.

$\begin{cases} f'_x = \ldots \\ f'_y = \ldots \end{cases}$

$\begin{cases} f'_x = y \quad (1) \\ f'_y = 1 \quad (2) \end{cases}$ – не бывает

$r_{xy} = r_{yx} \ldots$

$n_{xy} = n_{yx}.$

$f''_{xy} = 1 \neq f''_{yx} = 0.$

Для записей

Содержание

Определение

Рассматриваем 2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение

Развёртывающаяся поверхность — поверхность, изометричная плоской области.

Свойство (следствие теоремы Гаусса)

У любой развёртывающейся поверхности $K = 0$ во всех точках. (Дальше будем пользоваться только этим.)

Примеры: области на конусах, цилиндрах, поверхности касательных.

Информация

Верно и обратное: если $K = 0$ во всех точках, то поверхность локально изометрична $\mathbb{R}^2$.
Пока без доказательства.

$$\boxed{r(x,y) = \gamma(x) + y\,\gamma'(x)}$$

Упр (1) $K = 0$.
(2) Она развертывающаяся

Формулировка

Теорема

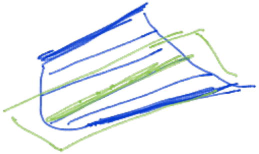
Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — развёртывающаяся поверхность. Тогда

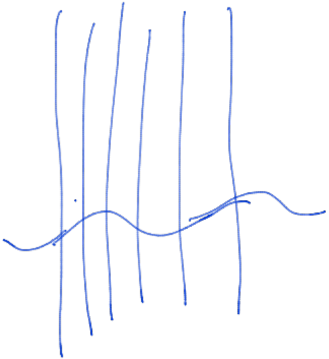
1. *через каждую точку $p \in M$ проходит отрезок, целиком лежащий на поверхности;*
2. *касательные плоскости к M во всех точках этого отрезка совпадают.*

Самое сложное — доказательство первого утверждения, второе получается по ходу дела.

Задача

Если M изометрична всей плоскости $\mathbb{R}^2$, то через каждую точку M проходит прямая, лежащая на M, и все эти прямые параллельны.
Таким образом, в этом случае M — цилиндр над некоторой кривой.

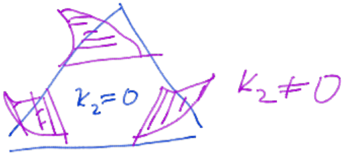




Доказательство – 1: общий план

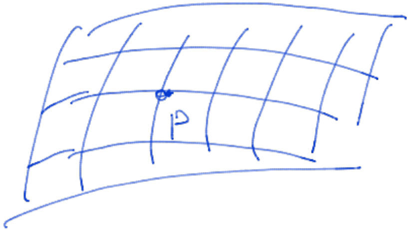
Рассмотрим главные кривизны $\varkappa_1, \varkappa_2$.
Так как $K = \varkappa_1\varkappa_2 = 0$, можно считать, что $\varkappa_1 = 0$.
M разбивается на два множества: с $\varkappa_2 \neq 0$ и с $\varkappa_2 = 0$.
Рассматриваем их отдельно.

$K = k_1 k_2 = 0$



План для точки $p \in M$ с $\varkappa_2 \neq 0$:

1. В малой окрестности p строим систему координат так, что координатные линии — линии кривизны (т.е. их касательные — главные направления)
2. Из теоремы Родрига и симметрии вторых производных выводим, что первые координатные линии — отрезки.



Доказательство – 1: общий план

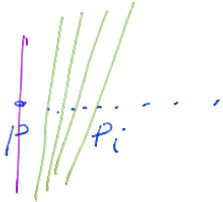
Рассмотрим главные кривизны κ_1, κ_2.
Так как $K = \kappa_1\kappa_2 = 0$, можно считать, что $\kappa_1 = 0$.
M разбивается на два множества: с $\kappa_2 \neq 0$ и с $\kappa_2 = 0$.
Рассматриваем их отдельно.

План для точки $p \in M$ с $\kappa_2 \neq 0$:

1. В малой окрестности p строим систему координат так, что координатные линии — линии кривизны (т.е. их касательные — главные направления)
2. Из теоремы Родрига и симметрии вторых производных выводим, что первые координатные линии — отрезки.

План для точки $p \in M$ с $\kappa_2 = 0$:

1. Если $\kappa_2 = 0$ в некоторой окрестности, то эта окрестность — часть плоскости, и утверждение тривиально.
2. Иначе сколь угодно близко к данной есть точки с $\kappa_2 \neq 0$, через них уже проведены отрезки. Отрезок через p строится предельным переходом.



Доказательство – 2: вторая часть теоремы

Факт

Если $K \equiv 0$ и на поверхности лежит отрезок, то касательные плоскости во всех точках этого отрезка совпадают (и в линейном, и в аффинном смысле).

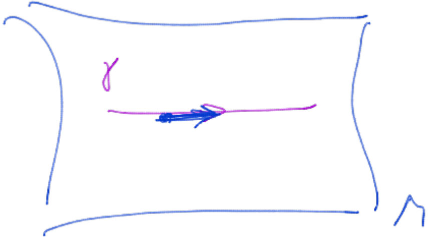
Факт

Если $K \equiv 0$ и на поверхности лежит отрезок, то касательные плоскости во всех точках этого отрезка совпадают (и в линейном, и в аффинном смысле).

натурально.

Доказательство.

Пусть γ — параметризация этого отрезка.
$\kappa_\gamma = 0 \implies$ нормальная кривизна γ равна 0
$\implies \mathbf{II}(\gamma', \gamma') = 0$ (теорема Менье)
$\implies$ (так как $K = 0$) γ' — главное направление, соответствующее главной кривизне $\kappa_1 = 0$.



$k_n = 0$
$\parallel$
$II(\gamma', \gamma')$.

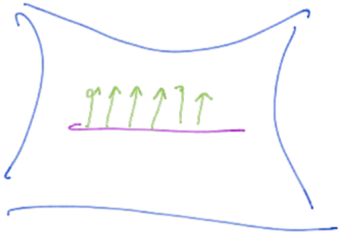
$II = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$.

$II(\gamma', \gamma') = k_2 \sin^2 \varphi$

Доказательство – 2: вторая часть теоремы

Факт

Если $K \equiv 0$ и на поверхности лежит отрезок, то касательные плоскости во всех точках этого отрезка совпадают (и в линейном, и в аффинном смысле).



$n = n_\mu.$

Доказательство.

Пусть γ — параметризация этого отрезка.

$\kappa_\gamma = 0 \implies$ нормальная кривизна γ равна 0

$\implies \mathbf{II}(\gamma', \gamma') = 0$ (теорема Менье)

$\implies$ (так как $K = 0$) γ' — главное направление, соответствующее главной кривизне $\kappa_1 = 0$.

Пусть $n(t)$ — нормаль поверхности в точке $\gamma(t)$.

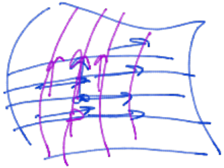
По теореме Родрига, $\boxed{n' = -\kappa_1 \gamma'} = 0$.

$\implies n(t) = const$

$\implies T_{\gamma(t)} M = (n(t))^\perp = const.$ □

T линейная пл-ть.

Рассматриваем $p \in M$ с $\varkappa_2 \neq 0$. Так как p не умбилическая, в ее окрестности главные направления гладко зависят от точки. Применим к ним такую лемму:



Лемма

Пусть M^2 — гладкое многообразие, V, W — векторные поля на M, и в точке $p \in M$ векторы V_p и W_p линейно независимы.
Тогда в окрестности p существует такая карта, что в ней V и W касаются координатных линий
(т.е. пропорциональны координатным полям).

Замечание

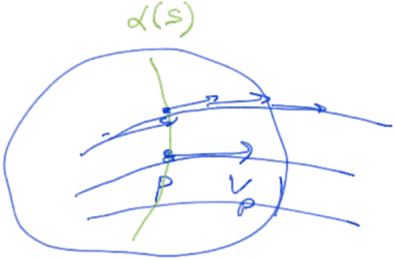
- В старших размерностях аналогичное утверждение неверно.
- Неверно, что можно сделать V и W координатными векторными полями.

Доказательство – 4: доказательство леммы

Теорема (о выпрямлении векторного поля)

Пусть V — векторное поле на M, Если $V_p \neq 0$, то в окрестности p существует карта, в которой V — координатное векторное поле первой координаты.

Доказательство: из дифференциальных уравнений.



$$F : \mathbb{R}^2 \to M.$$

- $F(x,y) = \gamma_y(x)$

$F(t,s) = \gamma_s(t)$

$\gamma_s(t)$ – реш. ур-я

$$\begin{cases} \gamma_s'(t) = V(\gamma_s(t)) \\ \gamma_s(0) = \alpha(s). \end{cases}$$

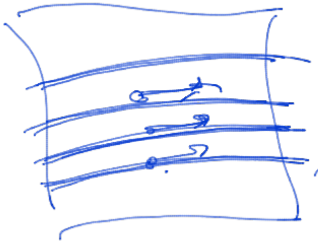
$d_{(0,0)}F$ – невыр. $\Rightarrow \exists\ F^{-1} \Leftarrow$ искомая карта !

Теорема (о выпрямлении векторного поля)

Пусть V — векторное поле на M, Если $V_p \neq 0$, то в окрестности p существует карта, в которой V — координатное векторное поле первой координаты.

Доказательство: из дифференциальных уравнений.

Построим такую карту $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ для V и рассмотрим функцию $f := \varphi_2 \colon U_1 \subset M \to \mathbb{R}$, где $U_1 \subset M$ — область определения карты φ.
Функция f обладает свойствами: (1) $d_p f \neq 0$;
(2) $V_q \in \ker d_q f$ для всех $q \in U$.



$U \subset M$

$\varphi : U \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$

Опр. Траектория вект. поля V — реш-е ур-я

$\gamma'(t) = V(\gamma(t))$.

$$\boxed{d\varphi_2(V) = \varphi_2(\gamma(t))'_t}$$

Доказательство – 4: доказательство леммы

Теорема (о выпрямлении векторного поля)

Пусть V — векторное поле на M, Если $V_p \neq 0$, то в окрестности p существует карта, в которой V — координатное векторное поле первой координаты.

Доказательство: из дифференциальных уравнений.

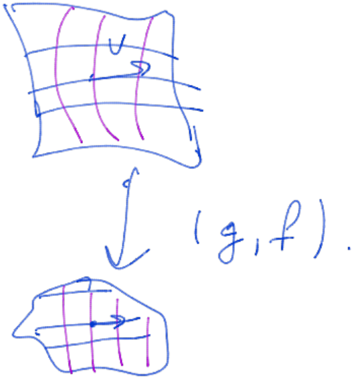
Построим такую карту $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ для V и рассмотрим функцию $f := \varphi_2 : U_1 \subset M \to \mathbb{R}$, где $U_1 \subset M$ — область определения карты φ.
Функция f обладает свойствами: (1) $d_p f \neq 0$;
(2) $V_q \in \ker d_q f$ для всех $q \in U$.

Построим аналогичную функцию $g : U_2 \subset M \to \mathbb{R}$ для поля W.
Отображение $F = (g, f) : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет теореме об обратной функции в точке $p \implies$ она является картой в некоторой меньшей окрестности.

Эта карта F — искомая. Лемма доказана

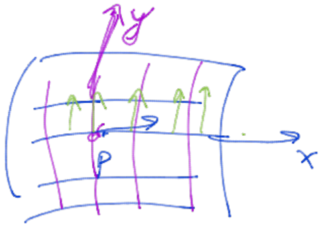
$F : \mathcal{U}_3 \subset M \to \mathbb{R}^2$

$F(x) = (f(x), g(x))$ - невыр.



Доказательство – 5: построение отрезка

Рассмотрим точку p с $\kappa_2 \neq 0$. По доказанному в её окрестности есть локальная параметризация $r\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to M$, у которой координатные линии — линии кривизны. Пусть $n\colon U \to \mathbb{R}^3$ — нормаль M.



$\kappa_2(p) \neq 0$

По теореме Родрига

$$\boxed{n_x = -\kappa_1 r_x = 0}$$

$\Longrightarrow$ $n = const$ вдоль x-линий.

Доказательство – 5: построение отрезка

Рассмотрим точку p с $\kappa_2 \neq 0$. По доказанному в её окрестности есть локальная параметризация $r\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to M$, у которой координатные линии — линии кривизны. Пусть $n\colon U \to \mathbb{R}^3$ — нормаль M.

По теореме Родрига

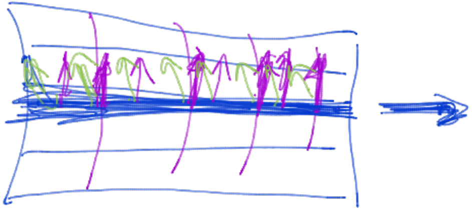
$$n_x = -\kappa_1 r_x = 0$$

$\implies$ $n = const$ вдоль x-линий.

По теореме Родрига для y-линий, $n_y = -\kappa_2 r_y$.
Отсюда, так как $n_{yx} = n_{xy} = 0$
$\implies$ $\boxed{n_y = \boxed{-\kappa_2 r_y = const}}$ вдоль x-линий

Итак, вдоль каждой x-линии есть два постоянных вектора, n и $\kappa_2 r_y$, которые ортогональны x-линии и друг другу $\implies$ направление x-линии постоянно
$\implies$ она отрезок.

Построили искомый отрезок через точку p с $\kappa_2 \neq 0$



$n_x = 0$

$n_{xy} = 0$

$n''_{yx} = (-\kappa_2 r_y)'_x$.

$r_x \parallel n \times (-\kappa_2 r_y) = const$

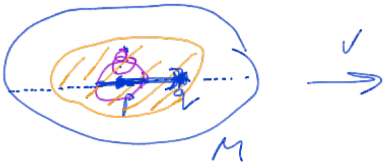
$\boxed{r_x \perp r_y \text{, т.к. это главные напр-я}}$

Доказательство – 6: продолжение отрезка до края

Продолжаем рассматривать тот же случай $\varkappa_2(p) \neq 0$. Докажем дополнительно, что построенный отрезок продолжается до «края» поверхности (формальное утверждение: отрезок продолжается за любое компактное подмножество M).

Продолжим отрезок до максимального прямолинейного интервала, лежащего в M. Если у интервала нет концов, то мы доказали, что хотели. Если концы есть, то в них $\varkappa_2 = 0$, иначе отрезок продолжается. Докажем, такого быть не может (на самом деле на конце $\varkappa_2 \neq 0$).

Продолжение следует



$\cdot \{t \geq 0 : p + tv \in M\}.$

Доказательство – 7: продолжение отрезка до края, часть 2

В исходном рассуждении, можно считать, что x-линия через p параметризована натурально. На одной линии

$\Downarrow$

везде.

Тогда $\boxed{r_{xx} = 0} \overset{?}{\Longrightarrow} r_{xxy} = 0 \implies (r_y)_{xx} = 0 \implies$ r_y — линейная функция вдоль x-линии через p.

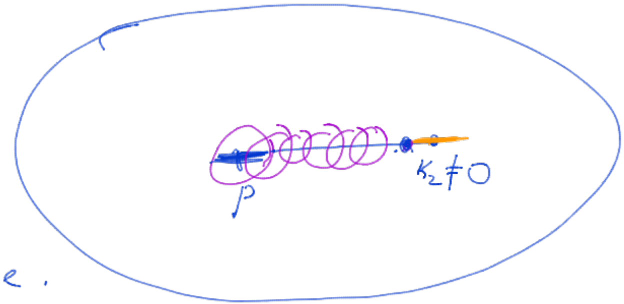
$r_y = (cx+d)\cdot w_0$, $\quad c, d \in \mathbb{R}$, $w_0 \in \mathbb{R}^3$

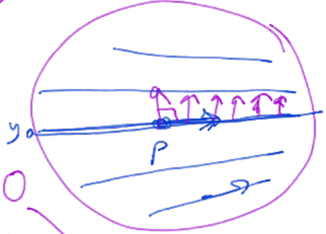
для $y = y_0$

С другой стороны, $\varkappa_2 r_y = const$ вдоль x-линий (было). $\implies$ вдоль отрезка $\varkappa_2$ имеет вид $\frac{1}{ax+b}$ как функция натурального параметра x

Это свойство не зависит от координат $\implies$ оно сохраняется вдоль всего отрезка $\varkappa_2 \neq 0$ на конце.

Доказали, что отрезок через точку p с $\varkappa_2 \neq 0$ не может заканчиваться внутри M





$r(x,y)$

Если, что $|r_x| = 1$ при $y = y_0$,

то $|r_x| = 1$ везде.

$\langle r_x, r_x\rangle'_y = 2\langle r_x, r_{xy}\rangle \overset{?}{=} 0$ $\Big|$ $\langle r_{xy}, r_x\rangle = \langle r_{yx}, r_x\rangle = \langle r_y, r_x\rangle'_x - \langle r_y, r_{xx}\rangle$

$\parallel r_x$

Доказательство – 8: случай $\varkappa_2 = 0$

Теперь рассмотрим точку p с $\varkappa_2 = 0$.
Если есть окрестность, где всюду $\varkappa_2 = 0$, то это часть плоскости $\Longrightarrow$ утверждение теоремы тривиально.

Пусть сколь угодно близко к p есть точки с $\varkappa_2 \neq 0$.
Выберем из них последовательность $p_i \to p$.
Через каждую точку p_i проходит отрезок, лежащий на M и продолжающийся до края ($\Longrightarrow$ их длины отделены от 0).

Выберем из направлений отрезков, проходящих через p_i, сходящуюся подпоследовательность. В пределе получим направление отрезка, проходящего через p.

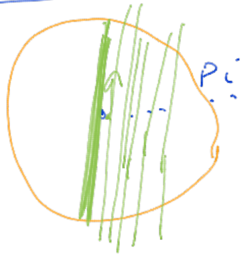
Теорема доказана

Временно прощаемся с геометрией поверхностей

$k_1 = k_2 = 0$

$\Rightarrow II = 0$.

$\Rightarrow n = const \Rightarrow M \subset$ (пл-ть).



$k_2(p_i) \neq 0$.

$p_i \to p$

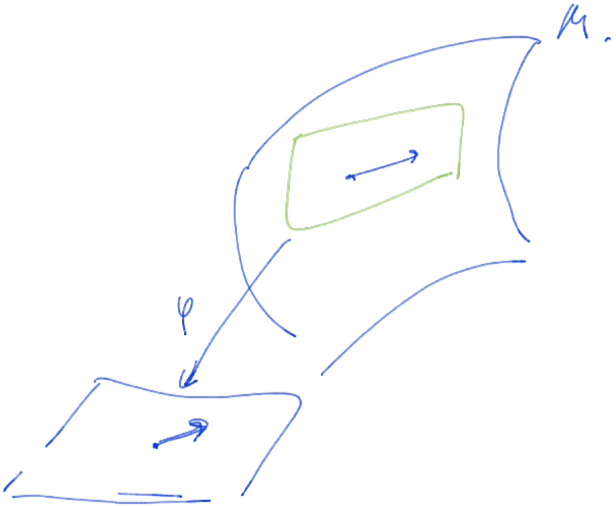
$\exists v_i : \{p_i + t v_i\}$
$\cap$
M_0
$\cap$
M
(компакт.)

$v_i \to v$.

$\Rightarrow p + tv \in M_0$.

Для записей

Содержание



Функции и векторные поля

Пусть M^n — гладкое многообразие.

Обозначения

$\mathfrak{F}(M)$ — пространство всех гладких функций из M в $\mathbb{R}$.

$\mathfrak{X}(M)$ — пространство всех гладких касательных векторных полей на M.

Замечание

- $\mathfrak{F}(M)$ — кольцо (и даже алгебра над $\mathbb{R}$) относительно поточечных операций сложения и умножения
- $\mathfrak{X}(M)$ — модуль над этим кольцом (алгеброй)

$$\mathfrak{F}(M) = C^\infty(M).$$

$$\mathfrak{X}(M) = C^\infty(TM).$$

$$f \in \mathfrak{F}(M)$$

$$V \in \mathfrak{X}(M).$$

$$\Downarrow$$

$$f \cdot V \in \mathfrak{X}(M).$$

$$(fV)_p = f(p) \cdot V(p).$$

Дифференцирование вдоль вектора и векторного поля

Определение

Для $p \in M$, $v \in T_pM$, определим $D_v : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ — дифференцирование функции вдоль v:

$$D_v(f) = d_pf(v).$$

Для $V \in \mathfrak{X}(M)$ определим $\boxed{D_V : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)}$ — дифференцирование функции вдоль векторного поля

$$(D_Vf)(p) = D_{V_p}f = d_pf(V_p), \qquad p \in M.$$

Свойства оператора дифференцирования

Свойство

Отображения D_v *и* D_V *линейны над* $\mathbb{R}$ *и удовлетворяют правилу дифференцирования произведения («формула Лейбница»):*

$$\boxed{D_v(fg) = f(p) \cdot D_v g + D_v f \cdot g(p)}$$

$$\boxed{D_V(fg) = f \cdot D_V g + D_V f \cdot g}$$

для любых $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

$$(fg)'_v = f'_v g + f g'_v$$

Касательные векторы как дифференцирования

Теорема

Пусть $p \in M$, и пусть $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ — линейное отображение, удовлетворяющее равенству

$$D(fg) = f(p) \cdot D(g) + D(f) \cdot g(p).$$

Тогда существует единственный $v \in T_pM$ такой, что $D = D_v$.

Следствие

Пусть $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ — линейное отображение, удовлетворяющее равенству

$$\boxed{D(fg) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g.}$$

Тогда существует единственное $V \in \mathfrak{X}(M)$ такое, что $D = D_V$.

Комментарии

Теорему можно использовать как определение касательного вектора.

Имея в виду такое определение, используют краткую запись дифференцирования:

$$vf = D_v f, \qquad Vf = D_V f$$

Пример: координатные поля системы координат $(x_1, \dots, x_n)$ обозначаются $\frac{\partial}{\partial x_i}$ или ∂_i.

На этом языке дифференциал отображения $\varphi \colon M \to N$ записывается так:

$$\boxed{(d\varphi(v))f = v(f \circ \varphi)}$$

для $v \in TM$, $f \in \mathfrak{F}(N)$.

Вместо $d_p\varphi(v)$ иногда используют обозначение $\varphi_*(v)$.

$vf = v(f).$

$\frac{\partial}{\partial x_i} f = f'_{e_i}$

$M \to TM$

$f \to df$

$M \xrightarrow{\varphi} N \qquad f : N \to \mathbb{R}$

$\varphi^* f = f \circ \varphi$

φ_*

$\leftarrow \varphi^*$