Содержание

Определения (повтор)

Пусть M^n — гладкое многообразие.

Обозначения

$\mathfrak{F}(M)$ — пространство всех гладких функций из M в $\mathbb{R}$.

$\mathfrak{X}(M)$ — пространство всех гладких касательных векторных полей на M.

V

Определение

Для $p \in M$, $v \in T_pM$. определим $D_v \colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ — дифференцирование функции вдоль v:

$$\underline{D_v(f) = d_pf(v)}.$$

Для $V \in \mathfrak{X}(M)$ определим $D_V \colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ — дифференцирование функции вдоль векторного поля

$$(D_Vf)(p) = D_{V_p}f = d_pf(V_p), \qquad p \in M.$$

Другое обозначение: f'_v, f'_V.

Формулировка (повтор)

Теорема

Пусть $p \in M$, *и пусть* $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ *— линейное отображение, удовлетворяющее равенству*

$$D(fg) = f(p) \cdot D(g) + D(f) \cdot g(p).$$

Тогда существует единственный $v \in T_pM$ *такой, что* $D = D_v$.

Следствие

Пусть $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ *— линейное отображение, удовлетворяющее равенству*

$$\underline{D(fg) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g.}$$

Тогда существует единственное $V \in \mathfrak{X}(M)$ *такое, что* $D = D_V$.

Доказательство теоремы – 1: константы

Докажем, что для любой константы c, $D(c) = 0$.

По линейности достаточно доказать это для $c = 1$.

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = 2D(1)$$

$\Longrightarrow D(1) = 0.$ $\square$

$D(fg) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g$

$f = g = 1$

Доказательство теоремы – 2: локальность

Лемма

Пусть $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ *— как в теореме. Тогда значение* $D(f)$ *однозначно определяется сужением* f *на любую окрестность* p.
То есть, если $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ *таковы, что* $f = g$ *в некоторой окрестности* p, *то* $D(f) = D(g)$.

Доказательство теоремы – 2: локальность

Лемма

Пусть $D\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ — как в теореме. Тогда значение $D(f)$ однозначно определяется сужением f на любую окрестность p.
То есть, если $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ таковы, что $f = g$ в некоторой окрестности p, то $D(f) = D(g)$.

Доказательство.

Утверждение равносильно такому: если $f = 0$ в некоторой окрестности $U \ni p$, то $D(f) = 0$.
Пусть $f|_U = 0$, рассмотрим срезающую функцию $h \in \mathfrak{F}(M)$ такую, что $h(p) = 1$ и $h_{M \setminus U} = 0$.
Тогда $fh = 0 \implies D(fh) = 0$ по линейности.
С другой стороны

$$0 = D(fh) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(p)}}D(h) + D(f)\overset{1}{\overset{\shortparallel}{h(p)}} = D(f) \longleftarrow$$

так как $f(p) = 0$ и $h(p) = 1$. □

$\exists\, h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_0 \in C^\infty$

$h_0|_{(-\delta,\delta)} = 1, \quad h_0|_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} = 0$

$\varepsilon > \delta > 0$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$

$h(x) = h_0(|x|).$

$fh \equiv 0$

Доказательство – 3: сведение к случаю $M = \mathbb{R}^n$

Из леммы следует, что достаточно доказать теорему для окрестности $U \ni p$ вместо M.

$\implies$ Достаточно доказать её для случая $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$. V

Далее считаем что $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$

Замечание

Полезно запомнить: касательный вектор как оператор дифференцирования в точке можно применять не только ко всюду определённым функциям, но и к заданным только в окрестности этой точки.

$D : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$

$\tilde{D} : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$

$f : U \to \mathbb{R}$

$\tilde{D}(f) = D(fh)$

$h \equiv 1$ около p

$h \equiv 0$ вне U

fh продолжим нулём.

Доказательство – 4: единственность

Доказываем, что касательный вектор $v \in T_pM$ однозначно определяется отображением $D_v\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$. для $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$

Пусть $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $v_i = D(x_i)$, где $x_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — i-я координатная функция. Это однозначно определяет v.

$x_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

$x_i = Pr_i$

Замечание

Полезно запомнить: координаты касательного вектора — производные координатных функций карты вдоль него.

Доказательство – 5: лемма Адамара

Лемма (лемма Адамара)

Пусть $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существуют такие $g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$, что

$$f(x) = \underset{\sim}{f(0)} + x_1 g_1(x) + x_2 g_2(x) + \dots + x_n g_n(x)$$

для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$.

$\sin x = x \cdot g(x)$, $g \in C^\infty$.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0. \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$\boxed{f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt.}$$

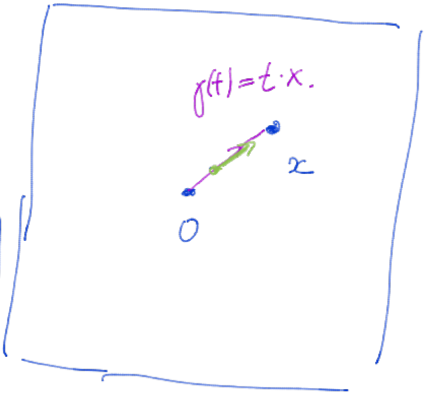
Выражение под интегралом перепишем в виде:

$$\frac{d}{dt} f(tx) = d_{tx} f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\partial_i f)(tx),$$

$\boxed{\partial_i f(tx)}$

где $(\partial_i f)(tx)$ — i-я частная производная f в точке tx.

в точке tx
вдоль вектора x



$x = \sum x_i e_i$

$d f(x) = \sum x_i \cdot df(e_i)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

По формуле Ньютона-Лейбница,

(1) $$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt.$$

Выражение под интегралом перепишем в виде:

$\sum_i x_i \cdot \partial_i f(tx)$.

(2) $$\frac{d}{dt} f(tx) = d_{tx} f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\partial_i f)(tx),$$

$g_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(tx)\, dt$

где $(\partial_i f)(tx)$ — i-я частная производная f в точке tx. Отсюда

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum x_i (\partial_i f)(tx)\, dt \qquad \vee,$$

$$= f(0) + \sum x_i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx)\, dt}_{= g(x)} =: \boxed{f(0) + \sum x_i g_i(x)}$$

где $g_i(x)$ — последний интеграл. Он гладко зависит от x по теореме о дифференцировании интеграла по параметру.

Доказательство – 7: финал

Доказываем теорему для $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$.

Существование: Рассмотрим $v \in \mathbb{R}^n$

коорд. ф-я.

$$v = (v_1, \ldots, v_n) := (D(x_1), \ldots, D(x_n)).$$

Докажем, что этот v подходит.

Пусть $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. По лемме Адамара $\boxed{f = f(0) + \sum x_i g_i}$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$D(f) = D(f(0)) + \sum (x_i(0) D(g_i) + D(x_i) g_i(0)) = \boxed{\sum v_i g_i(0)} \quad (*). = D_v f$$

Для $D_v(f)$ верно то же самое, так как $D_v(x_i) = v_i$.

$D : \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

линейный.

$D(fg) = f(0) \cdot D(g) + D(f) \cdot g(0)$

$x_i(0) = 0.$

В лемме Адамара

$g_i(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0.$

$\boxed{\forall f \quad D(f) = D_v(f)}$

Доказательство – 7: финал

Доказываем теорему для $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$.

Существование: Рассмотрим $v \in \mathbb{R}^n$

$$v = (v_1, \ldots, v_n) := (D(x_1), \ldots, D(x_n)).$$

Докажем, что этот v подходит.

Пусть $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. По лемме Адамара $f = f(0) + \sum x_i g_i$ для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$D(f) = D(f(0)) + \sum (x_i(0) D(g_i) + D(x_i) g_i(0)) = \sum v_i g_i(0)$$

Для $D_v(f)$ верно то же самое, так как $D_v(x_i) = v_i$.

Гладкость (для следствия про векторное поле): Из той же формулы $D_v(x_i) = v_i$, применённой во всех точках.

Д-во следствия.

$\underline{\mathrm{I}}$ $D : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$

...

$\underline{\text{Сл}}.$ $D : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$

....

$\forall p \in M \ \exists\, V = V(p) \in T_pM.$

$(Df)_p = D_{V(p)} f.$

i-я коорд. $V(p) = (D x_i)(p).$

Для записей

Содержание

Содержание

Определение

Пусть M^n — гладкое многообразие, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение

Скобка Ли X и Y — векторное поле $[X, Y]$ такое, что

$$[X, Y]f = XYf - YXf \qquad (*).$$

для любой $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Здесь и далее используется обозначение Xf вместо $D_X f$.

Теорема

Определение корректно (т.е. такое векторное поле существует).

Замечание

Оператор $f \mapsto XYf$ не задаёт векторное поле.

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

$$XYf - YXf = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

?

!

Доказательство теоремы

Мы определили $[X, Y]$ как отображение из $\mathfrak{F}(M)$ в себя. Очевидно, оно линейно. Теперь достаточно проверить тождество Лейбница:

$$[X, Y](fg) = ([X, Y]f)g + f([X, Y]g), \qquad (?).$$

тогда по предыдущей теореме $[X, Y]$ будет векторным полем.

Проверяем:

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X((Yf)g + f(Yg)) && (1). \\ &= (XYf)g + \cancel{(Yf)(Xg)} + \cancel{(Xf)(Yg)} + f(XYg) \\ YX(fg) &= (YXf)g + \cancel{(Xf)(Yg)} + \cancel{(Yf)(Xg)} + f(YXg) && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= XY(fg) - YX(fg) && (3) \\ &= (XYf)g + f(XYg) - (YXf)g - f(YXg) \\ &= ([X, Y]f)g + f([X, Y]g) \end{aligned}$$

□

$[X,Y] : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M).$

$[X,Y]f = XYf - YXf$

$Y(fg) = \dots$

Свойства скобки Ли

1. $[X, Y]$ линейна (над $\mathbb{R}$) по обоим аргументам.

$$[X, Y+Z] \overset{?}{=} [X, Y] + [X, Z].$$

$$(Y+Z)f = Yf + Zf.$$

$$X\cdot(Y+Z) - (Y+Z)X = \ldots$$

Свойства скобки Ли

1. $[X, Y]$ линейна (над $\mathbb{R}$) по обоим аргументам.
2. Кососимметричность: $[X, Y] = -[Y, X]$.

$$[X, Y] = XY - YX$$
$$[Y, X] = YX - XY.$$

1. $[X, Y]$ линейна (над $\mathbb{R}$) по обоим аргументам.
2. Кососимметричность: $[X, Y] = -[Y, X]$.
3. Тождество Якоби: для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0. \quad (*)$$

(Определение: векторное пространство с операцией $[,]$, удовлетворяющей этим трём свойствам, называется алгеброй Ли).

$$[X,[Y,Z]] = X[Y,Z] - [Y,Z]X =$$

$$= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X =$$

$$= XYZ - XZY - YZX + ZYX$$

Пример. (матрицы $n \times n$)

$$[A,B] = AB - BA.$$

Свойства скобки Ли

1. $[X, Y]$ линейна (над $\mathbb{R}$) по обоим аргументам.
2. Кососимметричность: $[X, Y] = -[Y, X]$.
3. Тождество Якоби: для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

(Определение: векторное пространство с операцией $[,]$, удовлетворяющей этим трём свойствам, называется алгеброй Ли).

4. Для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, g \in \mathfrak{F}(M)$,

f'_X.

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y \qquad (1)$$

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \qquad (2)$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \qquad (3)$$

$$\underline{(f\cdot X)\varphi = f(X\varphi).}$$

$$[X, fY]\varphi = X(fY)\varphi - (fY)X\varphi =$$

$$= X(f\cdot(Y\varphi)) - f(YX\varphi) =$$

$$= (Xf)(Y\varphi) + \underbrace{f\cdot(XY\varphi) - f(YX\varphi)}_{\parallel}$$

$$f\cdot([X,Y]\varphi).$$

$\boxed{[X, Y] = \text{«производная Ли» } Y \text{ вдоль } X.}$

Для записей

Скобка Ли координатных полей

Определение

Векторные поля X и Y коммутируют, если $[X, Y] = 0$.

∂_i – координатные поле.

Свойство

Координатные поля любой карты коммутируют.

$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$

Доказательство.

Из симметрии вторых частных производных. □

Скобка Ли координатных полей

Определение

Векторные поля X и Y коммутируют, если $[X, Y] = 0$.

Свойство

Координатные поля любой карты коммутируют.

Доказательство.

Из симметрии вторых частных производных. □

Замечание

Аналогично, если два поля имеют постоянные координаты в некоторой карте, то они коммутируют.

Скобка Ли в координатах

Теорема

Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $X = \sum f_i \partial_i$, $Y = \sum g_i \partial_i$, *где* ∂_i *— стандартные координатные поля в* $\mathbb{R}^n$, $f_i, g_i \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$[X, Y] = Y'_X - X'_Y, \qquad (*).$$

где X'_Y *и* Y'_X *— производные векторных полей как функций из* $\mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^n$, *то есть*

$$Y'_X = \sum (g_i)'_X \partial_i \qquad (1)$$

$$X'_Y = \sum (f_i)'_Y \partial_i \qquad (2)$$

Замечание

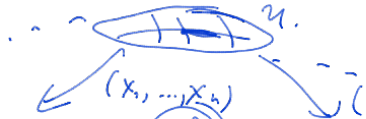
То же верно для координат в любой карте любого многообразия. V.

$X = (f_1, \ldots, f_n)$

$\Updownarrow$

$X = \sum f_i \partial_i$

$(\partial_i)_p$ имеет координаты $(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, \ldots 0)$ в выбранной карте



$x_i : U \to \mathbb{R}$

$(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad$ $(y_1, \ldots, y_n)$

$\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$

Доказательство теоремы

Зафиксируем i и найдём i-ю координату $[X, Y]$, продифференцировав координатную функцию $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$[X, Y]x_i = XYx_i - YXx_i = Xg_i - Yf_i = \boxed{(g_i)'_X - (f_i)'_Y}$$

Это и требовалось доказать. □

$Yx_i = Y(x_i) = g_i$

Xf – дифференцирование

fX – умножение.

Доказательство теоремы

Зафиксируем i и найдём i-ю координату $[X, Y]$, продифференцировав координатную функцию $x_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$[X, Y]x_i = XYx_i - YXx_i = Xg_i - Yf_i = (g_i)'_X - (f_i)'_Y$$

Это и требовалось доказать. $\square$

Замечание

Есть другое доказательство: пользуясь тождествами для скобки Ли, раскрыть скобки в формуле $[\sum f_i\partial_i, \sum g_j\partial_j]$.

Пример

Рассмотрим на xy-плоскости поля

$$V = \partial_1 = (1, 0)$$

и

$$W = x\partial_2 = (0, x)$$

Для них

$$[V, W] = \partial_2 = (0, 1) \qquad (*).$$

$\Longrightarrow$ они не коммутируют $\Longrightarrow$ не являются координатными полями никакой карты.

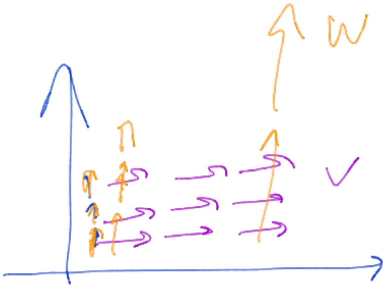
$$[V, W] = W'_V - V'_W$$

$$V'_W = 0 \quad (V = \mathrm{const}).$$

$$W'_V = (0, 1).$$

$$W'_V = \partial_1 W = \partial_1 (0, x) = \frac{\partial}{\partial x}(0, x) = (0, 1).$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}.$$



$$W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$W(x, y) = (0, x).$$

$$\exists\, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f'_x = V(f(x,y))$$

$$f'_y = W(f(x,y)).$$

Скобка Ли как мера некоммутирования потоков (задача)

Задача

Пусть $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_4$, где

γ_1 — траектория V за время ε с началом p,

γ_2 — траектория W за время ε с началом в конце γ_1,

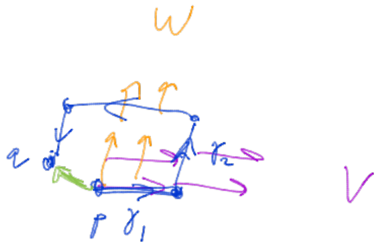
γ_3 — траектория $-V$ за время ε с началом в конце γ_2,

γ_4 — траектория $-W$ за время ε с началом в конце γ_3.

Пусть $q = q(\varepsilon)$ — конец γ_4. Тогда

$$\boxed{q - p = [V, W]_p \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)}$$

при $\varepsilon \to 0$.



2

Опр. γ — траектория V, если $\forall\, t$ $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$.

Пример

$$V = (xy,\ x-y)$$
$$W = (\sin x,\ \sin y).$$

$$[V, W] = ?$$

$$V = (xy)\cdot\partial_1 + (x-y)\partial_2$$

$$W'_V = (xy)\cdot\partial_1 W + (x-y)\partial_2 W =$$
$$= xy\cdot(\cos x, 0) + (x-y)\cdot(0, \cos y).$$

$$V'_W = \sin x\ \partial_1 V + \sin y\ \partial_2 V =$$
$$= \sin x\,(y, 1) + \sin y\cdot(x, -1).$$

$$[V, W] = (xy\cos x + \sin x\cdot y + \sin y\cdot x,\ (x-y)\cdot\cos y + \sin x - \sin y).$$

$$V = \varphi\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + (\varphi-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}.$$
$$W = \dots$$

Содержание

Формулировка

Пусть $K^k \subset M^n$ — гладкое подмногообразие.

Определение

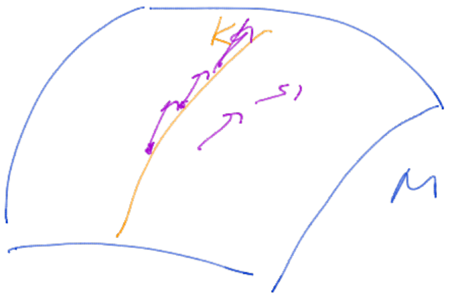
Будем говорить, что векторное поле $V \in \mathfrak{X}(M)$ касается K, если для любой точки $p \in K$ верно, что $V_p \in T_pK$.

Теорема

Если векторные поля V, W касаются K, то $[V, W]$ тоже касается K.

При этом $[V, W]|_K$ совпадает со скобкой Ли сужений $V|_K$ и $W|_K$, рассматриваемых как векторные поля на K.

V.



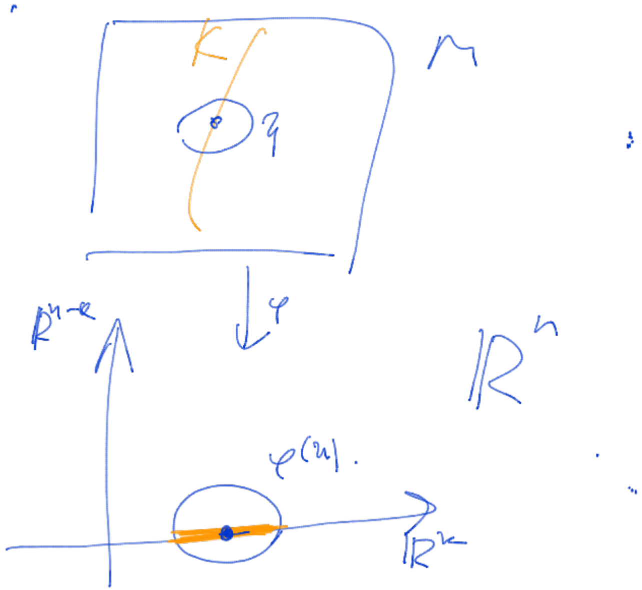
$T_pK \subset T_pM$.

Доказательство

Утверждение локально $\implies$ достаточно проверить его в окрестности каждой точки $p \in K$.

Выбрав карту $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, «выпрямляющую» K, сводим теорему к случаю $M = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

В этом случае теорема следует из координатной формулы $[V, W] = W'_V - V'_W$. $\square$



Пример

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z векторные поля

$$V = (1, 0, 0) = \partial_1$$

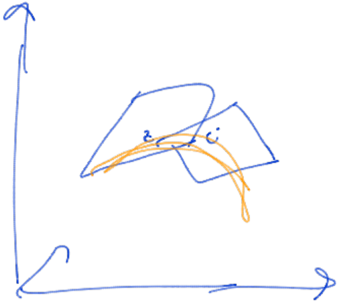
$$W = (0, 1, x) = \partial_2 + x\partial_3$$

Их скобка Ли

$$\boxed{[V, W] = (0, 0, 1) = \partial_3}$$

линейно независима с ними в каждой точке.

$\Longrightarrow$ не существует двумерной поверхности, которая касается V и W в каждой точке.



V.

$[V,W]_p \notin Lin(V_p, W_p)$.

Т. Фробениуса. Если $\forall p$ $[V,W]_p \in Lin(V_p, W_p)$ и лин. нез $\Rightarrow \exists$ такая пов-ть

Аналогично в $\forall$ размерности

Обобщение: скобка Ли и отображения (задача)

Пусть M, N — гладкие многообразия, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, $V \in \mathfrak{X}(M)$, $W \in \mathfrak{X}(N)$.

Определение

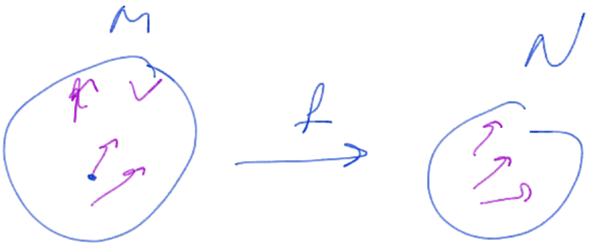
Будем говорить, что f **переводит** V в W, если $d_p f(V_p) = W_{f(p)}$ для всех $p \in M$.

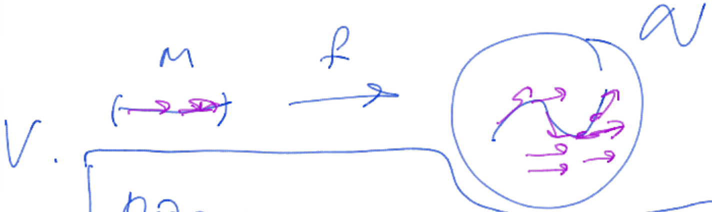
Задача

Если f переводит $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ в $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(N)$ соответственно, то f переводит $[V_1, V_2]$ в $[W_1, W_2]$.

Замечание

Предыдущая теорема получается как следствие (для отображения включения $in\colon K \to M$).





Подсказка.

f переводит V в $W \iff$

$\forall \varphi \in \mathcal{F}(N).\ V(\varphi \circ f) = (W\varphi) \circ f$