Римановы многообразия - план

16 февраля 2021 г. 18:53

Определение: риманово многообразие. Условие гладкости

Определение: изометрия римановых многообразий

Определение: коэффициенты римановой метрики в карте

Теорема: гладкость метрики равносильна гладкости коэффициентов.

Примеры:

- Вложенное подмногообразие.
- Метрика, индуцированная погружением.
- Метрика, заданная коэффициентами.
- Прямое произведение.

Определение: длина касательного вектора, длина гладкой кривой.

Определение: риманово расстояние.

Теорема: Риманово многообразие - метрическое пространство. Его метрическая топология совпадает с топологией многообразия.

Определения

13 февраля 2021 г.   17:23

$\boxed{\text{Опр}}$ Риманово многообразие — пара (M, g), где

- $M = M^n$ — гладкое многообразие
- g — гладкая риманова метрика

  (синонимы: риманова структура, метрический тензор).

Риманова метрика — семейство $g = \{g_x\}_{x \in M}$,

где g_x — скалярное произведение на T_xM.

Обозначение: $\boxed{g_x = \langle , \rangle_x = \langle , \rangle}$.

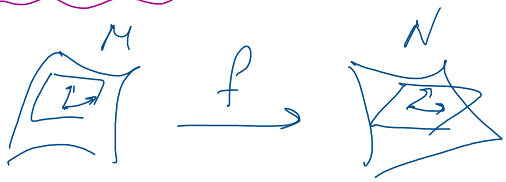
Условие гладкости: $\forall$ гладких векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

функция $\underset{\langle X, Y\rangle}{\overset{\parallel}{g(X,Y)}}$ — гладкая.

$\boxed{\text{Опр}}$ Изометрия римановых многообразий M, N. —

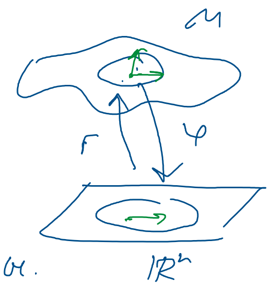
— диффеоморфизм $f: M \to N$, сохраняющий скалярное произведение:

$\forall x \in M \quad \forall v, w \in T_xM \quad \boxed{\langle d_xf(v), d_xf(w)\rangle_N = \langle v, w\rangle_M}$



Метрические коэффициенты

13 февраля 2021 г. 18:02



Опр Пусть M^n — риманово многообразие.

φ — карта в $U \subset M$ $(\varphi : U \to \mathbb{R}^n)$

$X_1, \dots, X_n$ — координатные поля этой карты.

$g(X_i, X_j)$

$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ — метрические коэффициенты (коэф-ты римановой метрики) в карте φ.

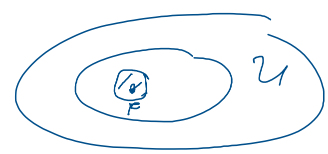
Примечание: Это функции на U. (те же буквы исп. для $g_{ij} \circ \varphi^{-1}$)

$X_i = (d\varphi^{-1})(e_i)$

Теорема 1. g_{ij} — гладкие функции (если g — гладкая рим. метрика).

2. Условие гладкости римановой метрики $\Longleftrightarrow$ $\exists$ атлас M, у которого в каждой карте метрические коэффициенты — гладкие.

Д-во: (1) Тонкость! $X_1, \dots, X_n$ — определены не всюду.



$\forall p \in U \quad \exists V_p \subset U$

и ф-я $h : M \to \mathbb{R}$, $h \in C^\infty$.

$h|_V \equiv 1$, $h|_{M \setminus U} \equiv 0$

$h \cdot X_i$ — всюду определено и C^∞

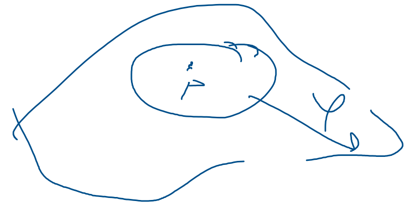
$\underbrace{\langle h \cdot X_i, h \cdot X_j \rangle}_{\substack{\shortparallel \\ C^\infty}}\Big|_V = \langle X_i, X_j \rangle \Big|_V$.

(2) $\Rightarrow$ из (1)

$\Leftarrow$ $X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \{$гл. вект. поле на $M\}$

Надо $\langle X, Y \rangle \in C^\infty$

В одной карте.



$X = \sum \xi_i X_i$

$Y = \sum \eta_j X_j$

$\langle X, Y \rangle = \sum \dots g_{ij} \in C^\infty$

$$Y = \sum \eta_j X_j$$

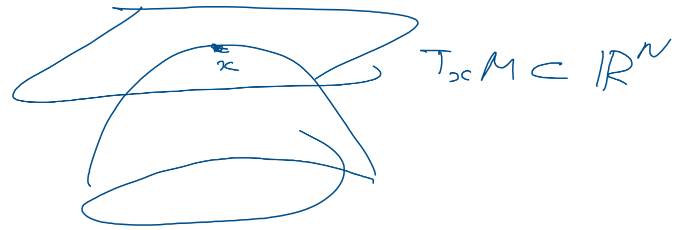
$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j g_{ij} \in C^\infty.$$

$\blacksquare$

Примеры

13 февраля 2021 г. 18:18

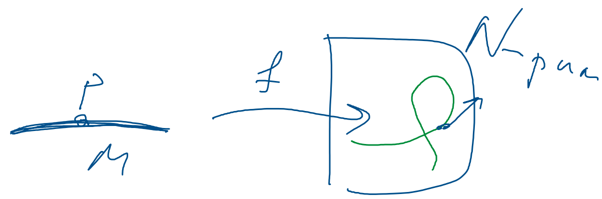
1. Вложенные подмн-я
   $M \subset \mathbb{R}^N$



2. $M \subset N$, где N — риманово мн-е $(T_xM \subset T_xN)$

3. N — рим., M — гл. мн-е.
   (N, g).

   $f: M \to N$ — погружение



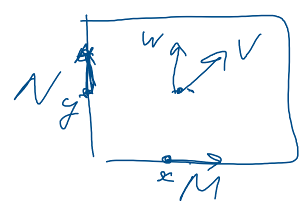
   f индуцирует рим. метрику $f_* g$ на M.

   $p \in M$, $v, w \in T_pM$ $\quad \langle v, w \rangle := \langle df(v), df(w) \rangle_{(N,g)}$

4. M — откр. область в $\mathbb{R}^n$
   (g_{ij}) — матричная ф-я:
   $\forall x$ $(g_{ij}(x))$ — симм. и полож. опр.

   <u>Напр.</u> $M = \mathbb{R}^2$ $\quad g_{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+1 & xy \\ xy & x^2+y^2+2 \end{pmatrix}$

5. Прямое произведение. (Упр.)

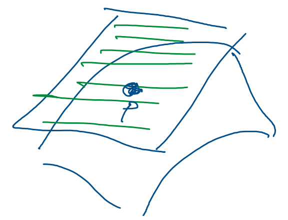


   M, N — рим. мн-я
   $M \times N$ — гл. мн-е.
   $T(M \times N) = TM \times TN$
   $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$.
   $\langle v, w \rangle := \langle d\,pr_1(v), d\,pr_1(w) \rangle + \langle d\,pr_2(v), d\,pr_2(w) \rangle$.

Длины и расстояния

13 февраля 2021 г. 18:57

Опр Пусть M – риманово многообразие, $p \in M$.



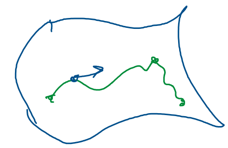
Норма касательного вектора $v \in T_pM$

$$|v| = |v|_g = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

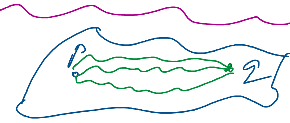
+ определение угла.

Длина гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to M$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$



Длина кусочно-гладкой кривой – сумма длин гладких частей.



Опр Расстояние между $p, q \in M$:

$$d_M(p,q) = \inf \{ \ell(\gamma) : \gamma \text{ – кусочно-гладкая кривая в } M, \ \gamma \text{ соединяет } p \text{ и } q \}.$$

Теорема Пусть M – связное риманово многообразие. Тогда

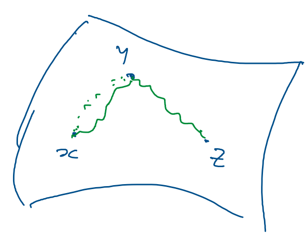
1. (M, d_M) – метрическое пр-во
2. Топология метрики d_M = топологии многообразия M.

Док-во ① • Симм – трив.

• Нер-во Δ-ка – трив.

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) + \varepsilon.$$

$$(\forall \varepsilon > 0).$$

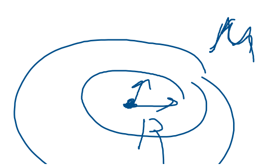


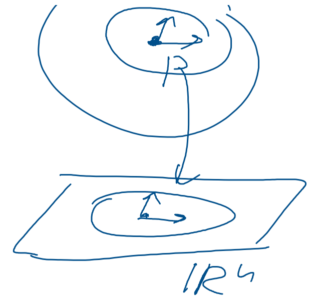
• $d(x,x)$ – трив.

• $x \ne y \Rightarrow d(x,y) > 0$?– вместе с ②.

② Лемма. $\forall p \in M$

$\exists$ карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \ni p$





$\exists$ карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \ni p$

т.ч.

$$\frac{d_M(x,y)}{|\varphi(x)-\varphi(y)|} \to 1 \quad \text{при } x,y \to p.$$

Д-во леммы. $\exists\, v_1, \dots, v_n$ – ортон. базис в T_pM

Выберем φ : (1) $\varphi(p) = 0$

(2) $d\varphi(v_i) = e_i$

Надо: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ окр-ть $V \ni p$ $(V \subset U)$.

$$\forall x,y \in V. \quad 1-\varepsilon < \frac{d(x,y)}{|\varphi(x)-\varphi(y)|} < 1+\varepsilon$$

1. $\exists$ окр-ть V_1 : $\forall x \in V_1$ $\forall v \in T_xM$

$$\boxed{1-\varepsilon < \frac{|v|_g}{|d\varphi(v)|_{\text{евкл}}} < 1+\varepsilon}$$

Д-во $\exists\, \xi_1, \dots, \xi_n$ – координаты v

$$|v|_g^2 = \sum{}' g_{ij} \xi_i \xi_j$$

$$|d\varphi(v)|_{\text{евкл}}^2 = \sum \xi_i^2.$$

$g_{ij}(x) \rightrightarrows \delta_{ij}$ – симв. Кронекера.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

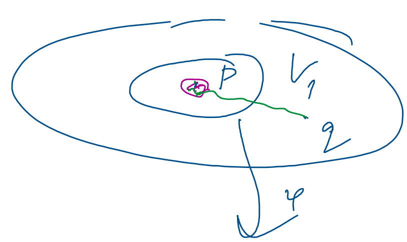
2. $\Rightarrow$ $\forall$ кривой $\gamma : [a,b] \to V_1$.

$$1-\varepsilon < \frac{l_g(\gamma)}{l(\varphi\circ\gamma)} < 1+\varepsilon$$

3. $\exists\, \varphi(V_1) \supset B_r(0)$

$V := \varphi^{-1}(B_{r/3}(0))$

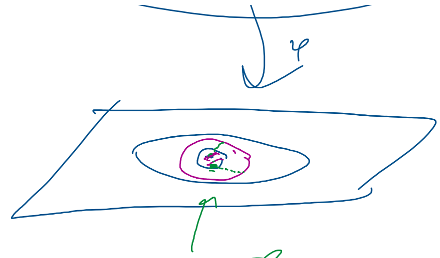
$\forall x,y \in V$.



$\forall x,y\in V.$

$$1-\varepsilon < \frac{d_M(x,y)}{|\varphi(x)-\varphi(y)|} < 1+\varepsilon$$

(если $\varepsilon < \frac{1}{10}$).



чтобы выйти, кривая $\geq \frac{4}{3} r\cdot(1-\varepsilon)$ длин. $\boxed{=}$

$\Longrightarrow$ теорема ?

(A) $q\neq p$ почему $d(p,q)>0$?

$d(p,q)\geq(1-\varepsilon)\,|\varphi(p)-\varphi(q)|>0$; если $q\in V$

если $q\notin V$, то $d(p,q)\geq(1-\varepsilon)\,r>0$.

(B) Топология — та же !

d_M и $d_{евкл}(x,y):=|\varphi(x)-\varphi(y)|$ экв-ны.

$\boxed{\checkmark}$

Плоскость Лобачевского - план

16 февраля 2021 г. 20:13

Определение: модель Пуанкаре в полуплоскости {y>0}.

Длины и углы в этой модели.

Определение: Абсолют модели Пуанкаре в полуплоскости - прямая {y=0}

Движения

Определение: Элементарные движения - параллельные переносы на горизонтальные векторы, осевые симметрии относительно вертикальных прямых, положительные гомотетии с центром на абсолюте, инверсии с центром на абсолюте.

Теорема: Элементарные движения - изометрии плоскости Лобачевского

Определение: движения плоскости Лобачевского - композиции элементарных движений.

Задача: Описание группы движений через комплексные дробно-линейные функции.

Прямые и отрезки

Определение: Прямые плоскости Лобачевского - вертикальные лучи и полуокружности с центром на абсолюте.

Теорема: Прямые плоскости Лобачевского изометричны R как метрические пространства.

Доказательство:

1. Лемма: Вертикальный отрезок - единственный кратчайший путь между своими концами на плоскости Лобачевского (в классе кусочно-гладких путей, единственность - с точностью до замены параметра).
2. Следствие: Вертикальный луч на плоскости Лобачевского изометричен R.
3. Применяя инверсии, выводим это для полуокружностей

Свойства прямых:

- Через любую пару различных точек проходит единственная прямая.
- Аксиома параллельных неверна
- Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости
- Группа движений действует транзитивно на флагах (аксиомы об однородности).
- Неравенство треугольника - строгое, если точки не лежат на одной прямой.

Модель Пуанкаре в круге

Определение: Модель Пуанкаре - образ модели в полуплоскости при подходящей инверсии, с римановой метрикой, для которой эта инверсия - изометрия.

Вычисление метрического тензора для модели в круге.

Наблюдение: Повороты вокруг центра - изометрии круговой модели.

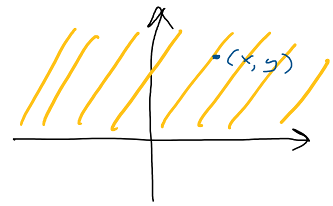
Следствие: Шар круговой модели с центром в 0 - евклидов круг.

Следствие: Все шары обеих моделей - евклидовы круги (с другим центром).

Определение - модель Пуанкаре в полуплоскости

15 февраля 2021 г. 21:33

$\boxed{\text{Опр}}$ Плоскость Лобачевского (гиперболическая плоскость) – верхняя полуплоскость $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$ с римановой метрикой



$$\left(g_{ij}(x,y)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

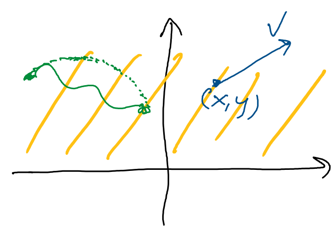
Обозначение $\mathbb{H}^2$.

$\boxed{\text{Опр}}$ n-мерное гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ – аналогично: $\mathbb{H}^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$, $g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\cdot\delta_{ij}$

Не будем рассматривать

$\boxed{\text{Длины и углы}}$

- Длина кас. вектора $v\in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$:



$$\boxed{|v|_h = \frac{|v|_{\text{евкл}}}{y}}$$

- Длина кривой $\gamma:[a,b]\to\mathbb{H}^2$, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$

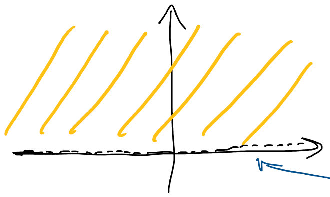
$$\boxed{\ell_h(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|_{\text{евкл}}}{y(t)}\,dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}\,dt}$$

- Углы в $\mathbb{H}^2$ равны евклидовым (метрика – конформная) $g_{ij}(x) = \lambda^2(x)\cdot\delta_{ij}$ $\boxed{\lambda(x,y)=\frac{1}{y}}$

Элементарные движения

15 февраля 2021 г. 21:34

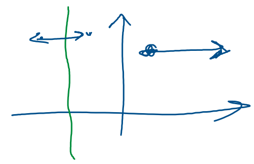
$\boxed{\text{Опр}}$ <u>Абсолют</u> модели Пуанкаре в полупл-ти — прямая $\{y=0\}$.



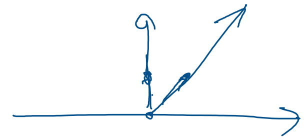
абсолют (не содержится в $\mathbb{H}^2$!)

$\boxed{\text{Теорема}}$ Следующие преобразования — изометрии $\mathbb{H}^2$:

1. • Горизонтальные параллельные переносы:
   $\boxed{(x,y) \longmapsto (x+c,\ y)}$

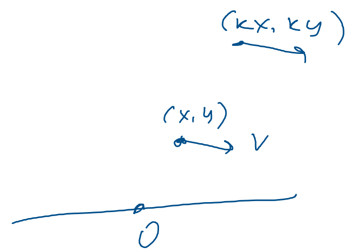


2. • Симметрии отн. вертикальных прямых:
   $\boxed{(x,y) \longmapsto (c-x,\ y)}$



3. • Гомотетии с центром на абсолюте с к-том > 0.
4. • Инверсии с центром на абсолюте (определим позже).

1, 2 — очев.



③ Док. $f(x,y) \Rightarrow (kx, ky)$

$v \in T_{(x,y)} \mathbb{H}^2$.

$|v|_h = \frac{1}{y} |v|_{евкл}$.

$df(v) = (\underbrace{kx, ky}_{\text{точка}},\ kv)$

$|df(v)|_h = |kv|_{евкл} \cdot \frac{1}{ky} = |v|_{евкл} \cdot \frac{1}{y}$

Инверсия: определение и свойства

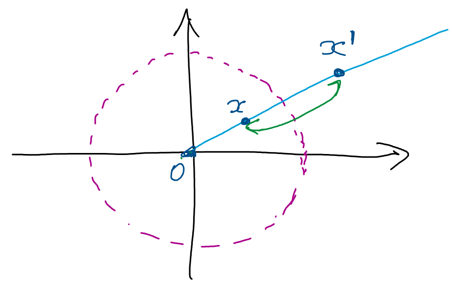
15 февраля 2021 г. 21:35

Опр. Инверсия с центром $O \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $R > 0$. — отображение $I : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, т.ч. для $x' = I(x)$

(1) $$\overrightarrow{Ox'} = \frac{R^2}{|Ox|^2}\,\overrightarrow{Ox}$$

или:

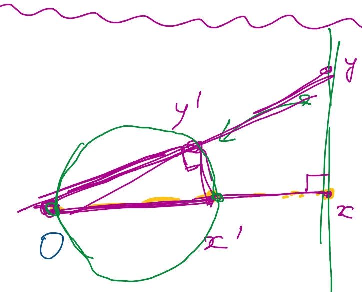
(2) $$\overrightarrow{Ox'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ox}$$
$$|Ox'| \cdot |Ox| = R^2$$



Свойства $\qquad I(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$ (в $\mathbb{C}$). $\qquad z \to \frac{c}{\bar{z}}$

- Сохраняет углы.
- Переводит прямые и окружности в прямые и окружности

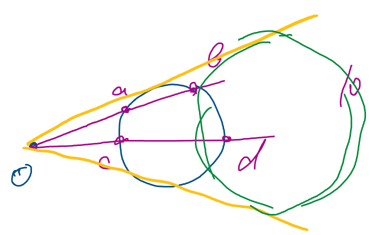
— в себе



$\Delta O x' y' \simeq \Delta O y x$

$\Downarrow$

$\angle O y' x' = \pi/2$



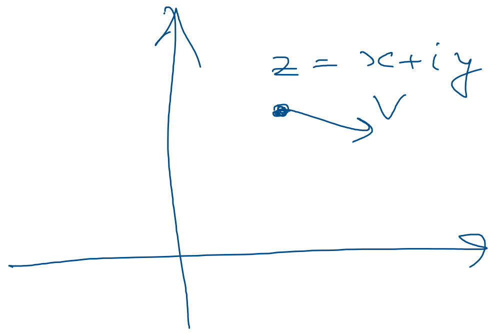
$|oa| \cdot |ob| = |oc| \cdot |od|$ — подсказка.

Инверсия: проверка изометричности

15 февраля 2021 г. 21:36

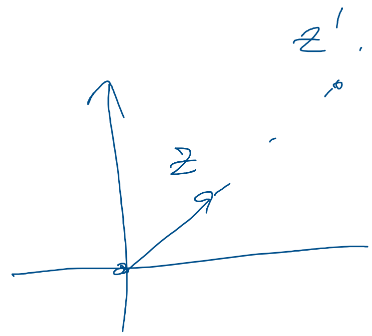
Дост. док-ть для инв. с центром O
и радиусом 1.

$$I(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \overline{f(z)}$$



$$f(z) = 1/z \quad (\text{в } \mathbb{C}).$$

$$f'(z) = -1/z^2.$$



$$d_z f(v) = -\frac{1}{z^2}\cdot v.$$

$$|d_z I(v)| = |d_z f(v)| = \frac{|v|_{евкл}}{|z|^2}$$

$$\vec{Oz'} = \frac{1}{|z|^2}\cdot \vec{Oz} \quad (\text{в } \mathbb{R}^2).$$

$$z = (x, y) \qquad z' = \frac{(x, y)}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{|z|^2}, \frac{y}{|z|^2}\right).$$

$$|d_z I(v)|_h = \frac{|d_z I(v)|_{евкл}}{y/|z|^2} = \frac{|v|_{евкл}/|z|^2}{y/|z|^2} = \frac{|v|_{евкл}}{y} = |v|_h$$

∎

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 1