Доказательство

28 февраля 2021 г. 23:20

$\boxed{\text{Дано}}$ M - гладкое многообразие

$F: \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ $[\mathcal{X}(M)]$

F — k-линейно над $\mathcal{F}(M)$.

$\boxed{\text{Надо:}}$ $\exists$ тензор $\{F_p\}_{p\in M}$, т. ч. F - поточечное применение $\{F_p\}$.

тип $(k,0)$ $\boxed{(k,1)}$ $\boxed{F(X_1,\ldots,X_k)_p = F_p(X_1(p),\ldots,X_k(p))}$

очевидно $\{F_p\}$ единственный.

$\boxed{\text{Переформулировка}}$ $F(X_1,\ldots,X_k)_p$ однозначно определяется значениями $X_1(p),\ldots,X_k(p)$ (не зависит от продолжений).

$\boxed{\text{То есть}}$ если $\widetilde{X}_1(p) = X_1(p), \ldots, \widetilde{X}_k(p) = X_k(p)$,

то $F(\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_k)_p = F(X_1,\ldots,X_k)_p$.

$\boxed{\text{Наблюдение}}$ Достаточно проверить это для $k=1$.

$\exists\, v_1,\ldots,v_k \in T_pM$.

$F_p(v_1,\ldots,v_k) := F(\widetilde{V}_1,\ldots,\widetilde{V}_k)_p$

корректность

для $k=1$ верно $\Rightarrow F(\widetilde{X}_1, X_2,\ldots,X_k) = F(X_1,X_2,\ldots,X_k) \Rightarrow$

$\ldots F(\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2, X_3,\ldots,X_k) = \ldots \quad \ldots$

$F: \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ или $\mathcal{X}(M)$.

линейно над $\mathcal{F}(M)$.

① Локальность.

$F(X)_p$ определяется сужением X на $\forall$ окр-ть p.

Т.е. если $U \ni p$ - окрестность, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

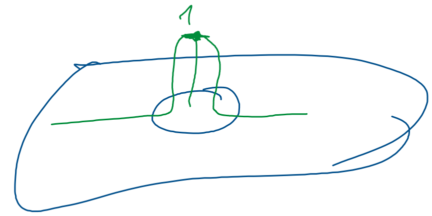
$$X|_U = Y|_U \Rightarrow F(X)_p = F(Y)_p.$$

$$(\Rightarrow F(X)| = F(Y)| \;)$$

$$\left(\Rightarrow F(X)\big|_U = F(Y)\big|_U\right).$$

$\exists\, h \in \mathcal{F}(M):\quad h(p) = 1$

$h\big|_{M\setminus U} = 0.$



$$hX = hY$$
$$\Downarrow$$
$$F(hX) = F(hY).$$
$$\Downarrow$$
$$h\cdot F(X) = h\cdot F(Y)$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{h(p)}_{1}\cdot F(X)_p = \underbrace{h(p)}_{1}\cdot F(Y)_p$$

(2) Зависимость только от X_p.

F можно доопределить на $\mathfrak{X}(U)$

Пусть $U \ni p$ – окр-ть p. В ней есть лок. координаты $E_1, \dots, E_n$ – коорд. векторные поля этой карты

$X \in \mathfrak{X}(U).$

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i$$

$$F(X) = \sum F(f_i E_i) = \sum f_i \cdot F(E_i).$$

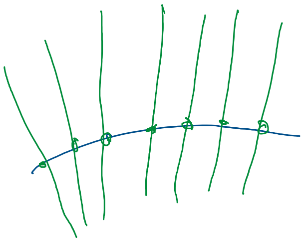
$$F(X)_p = \sum \underbrace{f_i(p)}_{\text{координаты вектора } X_p.} \cdot F(E_i)_p \text{ – фикс.}$$

$\blacksquare$

Верно такое

$$E \xrightarrow{\tilde{F}} E' \quad \text{– векторные расслоения}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & E' \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$ — векторные расслоения



$C^\infty(E) = \{$гладкие сечения $E\}$.

$F: C^\infty(E) \to C^\infty(E')$.

линейно над $\mathfrak{F}(M)$

$\exists \{F_p\}$, $F_p : E_p \to E'_p$ — линейно.

т.ч. F — поточечное применение F_p

($\exists\ \tilde{F}: E \to E'$, послойно линейно,

$F(X) = \hat{F} \circ X \quad \forall X$).

$E_p = \pi^{-1}(p)$

Упр Понять формулировку.

Аффинные связности - план

21 февраля 2021 г. 19:29

Аффинные связности

Определение: аффинная связность.

Примеры: координатное дифференцирование, "ковариантное дифференцирование" векторных полей на поверхности.

Свойства:
- Локальность.
- Разность связностей - тензор типа (2,1); сумма связности и тензора типа (2,1) - связность
- Следствие: в локальных координатах любая аффинная связность равна сумме координатного дифференцирования и некоторого тензора. (+Определение: символы Кристоффеля аффинной связности.)
- Следствие: Значение аффинной связности на двух полях в точке p однозначно определяется значением первого поля в точке p и сужением второго на любую кривую, выходящую из p в направлении этого вектора.

Симметричные связности

Определение: симметричная связность.
Определение: тензор кручения аффинной связности

Свойства:
- Тензор кручения - тензор
- (Следствие) Симметричность связности достаточно проверять на координатных полях
- (Переформулировка) Симметричность связности равносильна симметрии символов Кристоффеля.

Римановы связности

Определение: риманова (евклидова) связность

Лемма: условие римановости достаточно проверять на координатных полях

Связность Леви-Чивиты

Определение: Связность Леви-Чивиты - симметричная риманова связность.

Теорема ("основная теорема римановой геометрии") На любом римановом многообразии существует единственная связность Леви-Чивиты.

Связность (ковариантная производная) вдоль пути

Определение связности вдоль пути (два случая)

Теорема: определение корректно

Теорема: Формула с символами Кристоффеля

Свойства:

- Линейность над R
- Замена параметра (производная композиции)
- $(fV)' = f'V + fV'$
- Производная скалярного произведения
- Симметричность

Определение и примеры

21 февраля 2021 г. 22:27

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть M – гладкое многообразие

Аффинная связность на M – отображение

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$
$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

такое, что:

✓ 1) ∇ линейно над $\mathbb{R}$ по каждому аргументу

✓ 2) $\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y \quad \forall f \in \mathcal{F}(M),\ X, Y \in \mathcal{X}(M)$

✓ 3) $\nabla_X (fY) = \underbrace{f \cdot \nabla_X Y}_{} + \underbrace{(Xf) \cdot Y}_{} \quad \forall f \in \mathcal{F}(M)\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$

Вект. поле на M
$Y : M \to TM$.
$p \in M$,
$d_p Y : T_p M \to T_{Y(p)} TM$
$dY : TM \to TTM$

В $M = \mathbb{R}^n$ $\quad Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$D_X f. = X(f). = $ Xf – производная f вдоль X

$\shortparallel$

f'_X

fX – поточечное произведение

$$(Xf)_p = d_p f(v) \in \mathbb{R}$$

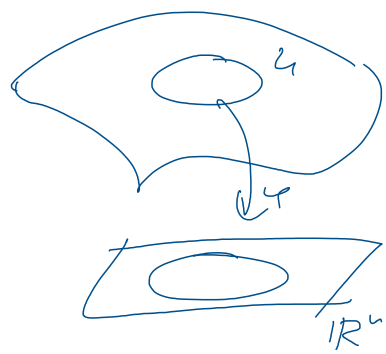
Примеры 1) $M = \mathbb{R}^n$, $\nabla_X Y = Y'_X$ (рассматривая Y как $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

2) Дана карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$
координатная производная

$$\nabla^{\varphi}_X Y := \sum (f_i)'_X \cdot E_i$$

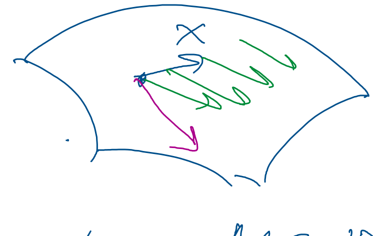
$$Y = \sum f_i E_i$$

(E_i – коорд. поля φ)



3). ∇ из 3-го семестра.

$$\nabla_X Y := pr_{TM}(Y'_X)$$



$M \subset \mathbb{R}^N$

где Y рассм. как $Y: M \to \mathbb{R}^N$ $\quad M \subset \mathbb{R}^N$

Пространство связностей

21 февраля 2021 г. 22:27

$\boxed{\text{Лемма}}$ 1. Разность аффинных связностей — тензор типа $(2,1)$

2. Сумма афф. связности и тензора типа $(2,1)$ — аффинная связность

---

1) ∇ и $\tilde{\nabla}$ — две афф. связности на M. $\Rightarrow \nabla - \tilde{\nabla}$ — тензор $(2,1)$

$$(\nabla_X - \tilde{\nabla}_X)(f \cdot Y) = \nabla_X(fY) - \tilde{\nabla}_X(fY) =$$

$$= f \cdot \nabla_X Y + \cancel{(Xf) \cdot Y} - f \tilde{\nabla}_X Y - \cancel{(Xf) \cdot Y} =$$

$$= f \cdot \left((\nabla_X - \tilde{\nabla}_X) \cdot Y \right).$$

2) F — тензор, $\tilde{\nabla} = \nabla + F$

$$\tilde{\nabla}_X(fY) = \nabla_X(fY) + F(X, fY) =$$

$$= f \cdot \nabla_X Y + (Xf) \cdot Y + f \cdot F(X,Y) =$$

$$= f \cdot \tilde{\nabla}_X Y + (Xf) \cdot Y. \qquad \blacksquare$$

Локальность и вид в координатах

21 февраля 2021 г. 22:42

$\boxed{\text{Лемма}}$ (локальность).

Пусть ∇ — афф. связность на M, $p \in M$. Тогда $(\nabla_X Y)_p$ однозначно определяется следующими данными:

✓ 1) Значение X_p

✓ 2) Сужение Y на любую окрестность p

$\boxed{\text{Следствие}}$ Можно доопределить ∇ на поле, заданные не на всём M, а на открытом подмн-ве

$\boxed{\text{Д-во леммы}}$ $p \in M$, $U \ni p$ — окрестность, $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$Y,\ \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M), \quad Y\big|_U = \tilde{Y}\big|_U.$$

$\boxed{\text{надо}}$ $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X \tilde{Y})_p$

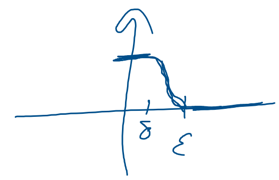
$\boxed{U \subset \mathbb{R}^n}$

Выберем $h \in \mathcal{F}(M)$:

1) $h\big|_{M \setminus U} = 0$.
2) $h(p) = 1$.
3) $d_p h = 0$.

$h_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

$h_0\big|_{[0,\delta]} \equiv 1$.



$h_0\big|_{[\varepsilon,\infty)} = 0$

$0 < \delta < \varepsilon$ (радиус шара в U)

$h(x) = h_0(|x|)$.

$$\Downarrow$$

$$h \cdot Y = h \cdot \tilde{Y}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_X (hY) = \nabla_X (h\tilde{Y}).$$

$$\Downarrow$$

$$h \cdot \nabla_X Y + (Xh) \cdot Y = h \cdot \nabla_X \tilde{Y} + (Xh) \cdot \tilde{Y}$$ подставим p

$$\underbrace{h}_{=1}\cdot D_X Y + \underbrace{(Xh)}_{=0}\cdot Y = \underbrace{h}_{=1}\cdot \nabla_X Y + \underbrace{(Xh)}_{=0}\cdot Y$$ подставим p

$$(\nabla_X Y)_p = (\tilde{\nabla}_X Y)_p.$$

$\blacksquare$

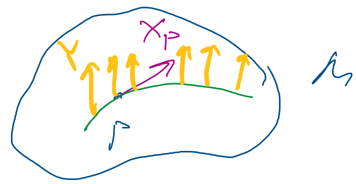
$\boxed{\text{Следствие}}$ В локальных координатах φ $\forall$ связность ∇ имеет вид.

$$\nabla_X Y = \underbrace{D_X^{\varphi} Y}_{\text{координатная производная}} + \underbrace{\Gamma(X,Y)}_{\text{тензор (2,1)}}$$

$\boxed{\text{Опр}}$ Символы Кристоффеля связности ∇ в координатах φ.

$$\Gamma_{ij} = \nabla_{E_i} E_j \overset{\text{из следствия}}{=} \Gamma(E_i, E_j).$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $(\nabla_X Y)_p$ однозначно определяется X_p и сужением Y на $\forall$ кривую γ, $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$.



Симметричные связности

21 февраля 2021 г. 22:29

$\boxed{\text{Опр}}$ Афф. связность ∇ – симметрична, если

$$\boxed{\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]} \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\boxed{[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \leftarrow \text{опр} [\,,\,]}$$

Опр. Тензор кручения афф. связности ∇ –

$$T = T_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\boxed{T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Тензор кручения – тензор типа $(2,1)$

$\boxed{\text{Следствие}}$ 1. Условие симметричности ($T_\nabla = 0$) достаточно проверять только для координатных полей

✓ 2. Симметричность $\nabla \iff \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} \iff$ симметричность $\Gamma(X,Y) = \Gamma(Y,X)$.

$\boxed{\text{Д-во}}$ $T(Y,X) = -T(X,Y) \Rightarrow$ достаточно проверить, что $T(X,\cdot)$ – тензор.

$$T(X,fY) = \nabla_X(fY) - \nabla_{fY} X - [X,fY] =$$

$$= f\cdot\nabla_X Y + \cancel{(Xf)\cdot Y} - f\cdot\nabla_Y X -$$

$$- f\cdot[X,Y] - \cancel{(Xf)\cdot Y} =$$

$$= f\cdot\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\right) = f\cdot T(X,Y). \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\begin{aligned} &[X,fY] = \\ &= f\cdot[X,Y] + \\ &+ (Xf)\cdot Y \end{aligned}}$$

Римановы связности

21 февраля 2021 г. 22:29

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть M — риманово многообразие

Афф. связность ∇ — риманова, если

$$\boxed{X\underbrace{\langle Y, Z\rangle}_{\in \mathcal{F}(M)} = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle} \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Разность левой и правой части — тензор

$\boxed{\text{Следствие}}$ Достаточно проверить равенство для координатных векторных полей.

$\boxed{\text{Д-во}}$ $G(X, Y, Z) = X\langle Y, Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

По X — очевидно.

По Y и Z — симметрично.

По Z:

$$G(X, Y, f\cdot Z) = \underset{(1)}{X\langle Y, fZ\rangle} - \underset{(2)}{\langle \nabla_X Y, fZ\rangle} - \underset{(3)}{\langle Y, \nabla_X (fZ)\rangle}$$

(1) $X\langle Y, fZ\rangle = X(f\langle Y, Z\rangle) =$

$= \cancel{(Xf)\cdot\langle Y, Z\rangle} + f\cdot(X\langle Y, Z\rangle)$

(2) — тензор

(3) $\langle Y, \nabla_X (fZ)\rangle = \langle Y, f\cdot\nabla_X Z + (Xf)\cdot Z\rangle$

$= f\langle Y, \nabla_X Z\rangle + \cancel{(Xf)\langle Y, Z\rangle}$

- - - -

$\boxed{\checkmark}$

Связность Леви-Чивиты

21 февраля 2021 г. 22:30

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть M — риманово многообразие.

Связность Леви-Чивиты на M — симметричная риманова аффинная связность.

$\boxed{\text{То есть}}$ $\boxed{\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)}$

$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \nabla_X Y \text{ линейна по } X \text{ и } Y \text{ над } \mathbb{R} \\ 2)\ \nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y \quad \text{"}\nabla_X f\text{"} \\ 3)\ \nabla_X (fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf) \cdot Y \\ \quad \forall f \in \mathcal{F}(M) \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M) \\ 4)\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \\ 5)\ X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \end{array}}$

$\boxed{\text{Теорема}}$ ("основная теорема римановой геометрии")

На любом римановом многообразии существует единственная связность Леви-Чивиты

$\boxed{\text{Д-во.}}$ единственность.

$$\ominus \quad \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_k}} E_k g_{ij} = E_k \langle E_i, E_j\rangle = \langle \Gamma_{ki}, E_j\rangle + \langle \Gamma_{kj}, E_i\rangle.$$

$$\oplus \quad E_i\, g_{jk} = \ldots$$

$$\oplus \quad E_j\, g_{ik} = \ldots$$

$$\langle \Gamma_{ij}, E_k\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l}\langle \Gamma_{ij}, E_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \Gamma_{ij}, E_n\rangle\end{array}\right. \text{ — однозначно определяет } \Gamma_{ij}$$

$$\nabla = \nabla^{\text{коорд}} + \Gamma$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 3