Доказательство теоремы

Monday, March 8, 2021 2:59 PM

$\boxed{\text{Единственность (повтор)}}$ Локально. Фикс. карту,

$X_1, \dots, X_n$ – координатные поля, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $\underline{\Gamma_{ij} = \nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ji}}$

$$(g_{ij})'_{x_k} = \underline{X_k \langle X_i, X_j \rangle} = \langle \Gamma_{ki}, X_j \rangle + \langle \Gamma_{kj}, X_i \rangle \qquad \nabla_{X_k} X_i$$

$$\begin{aligned}
- \;&\left\{ \langle \Gamma_{ik}, X_j \rangle + \langle \Gamma_{jk}, X_i \rangle = (g_{ij})'_{x_k} \right. && \text{симметрия } \Gamma_{ij} \\
+ \;&\left\{ \langle \Gamma_{ij}, X_k \rangle + \langle \Gamma_{ik}, X_j \rangle = (g_{jk})'_{x_i} \right. && + \text{ переобозначение } i, j, k \\
+ \;&\left\{ \langle \Gamma_{ij}, X_k \rangle + \langle \Gamma_{jk}, X_i \rangle = (g_{ik})'_{x_j} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \Gamma_{ij}, X_k \rangle = \frac{1}{2}\left((g_{ik})'_{x_j} + (g_{jk})'_{x_i} - (g_{ij})'_{x_k} \right)} \qquad (*)$$

Подставляем $k = 1, \dots, n$. Для Γ_{ij} заданы скалярные произведения с $X_1, \dots, X_k$ $\Longrightarrow$ Γ_{ij} определены однозначно

$\boxed{\text{Существование (в карте)}}$

Определим Γ_{ij} из $(*)$. и положим $\boxed{\nabla = \nabla^{\text{коорд}} + \Gamma}$,

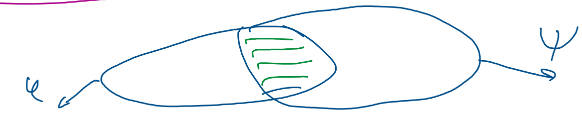
где Γ – тензор, определяемый условием $\Gamma(X_i, X_j) = \Gamma_{ij}$ $\forall i, j$

$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} \Longrightarrow$ связность симметрична.

$(*) \Longrightarrow$ условие римановости для координатных полей

$\Longrightarrow$ условие римановости для всех полей.

$\boxed{\text{Существование (глобально)}}$

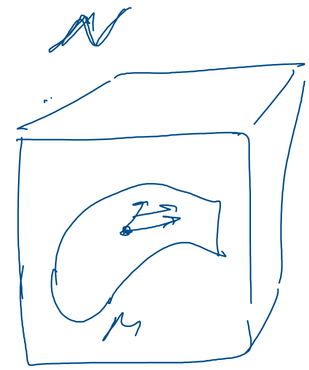


Строим в картах. Согласованность на пересечениях карт

Строим в картах. Согласованность на пересечениях карт следует из единственности

$\boxed{\text{Зам}}$ Если $M \subset \mathbb{R}^N$, то $D_X Y = \Pr_{TM}(Y'_X)$

в $\mathbb{R}^N$



$\boxed{\text{Упр}}$ Если N – рим. мн-е, M – подмногобр-е.

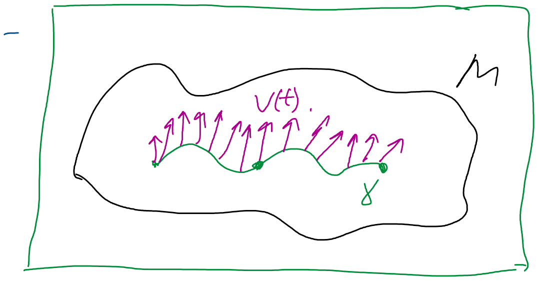
$$D^M_X Y = \Pr_{TM}\left(D^N_X \tilde{Y}\right)$$

$\tilde{Y}$ – продолжение Y на все N.
(на окрестность)

Связность вдоль пути

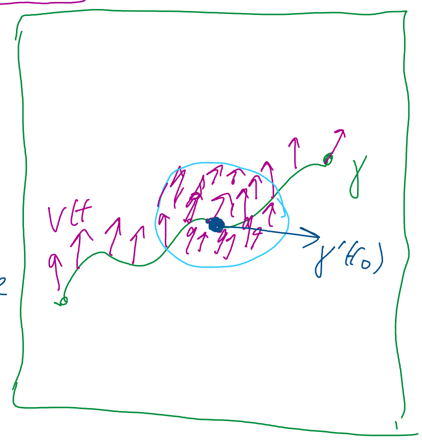
21 февраля 2021 г.   22:31

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть M — гладкое многообразие, $\gamma : I \to M$ — гладкая кривая.
Векторное поле вдоль кривой γ — гладкое отображение $V : I \to TM$, т.ч. $\forall t \in I \quad V(t) \in T_{\gamma(t)} M$



$\boxed{\text{Зам}}$ Аналогично можно определить векторное поле вдоль отображения $f : N \to M$, N — гладкое мн-е. $f \in C^\infty$

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть задана афф. связность ∇ на M.
Определим связность вдоль γ — $\boxed{\frac{\nabla}{dt} V(t)}$ или $\boxed{V'(t)}$ — тоже векторное поле вдоль γ



(1) • если $\gamma'(t_0) \neq 0$, то

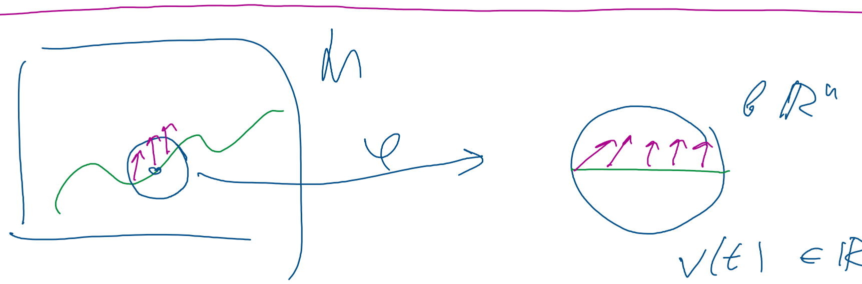
$$\boxed{\frac{\nabla}{dt} V(t)\Big|_{t=t_0} := \nabla_{\gamma'(t_0)} \widetilde{V}}$$

где $\widetilde{V}$ — гладкое локальное продолжение V на окрестность $\gamma(t_0)$ в M

$\boxed{V(t) = \widetilde{V}(\gamma(t))}$ при $t \approx t_0$

(2) • если $\gamma'(t_0) = 0$, то

$$\frac{\nabla}{dt} V(t)\Big|_{t=t_0} := \left(\text{координатная производная } V(t)\right).$$



$\exists$ продолжения

$V(t) \in \mathbb{R}^n$

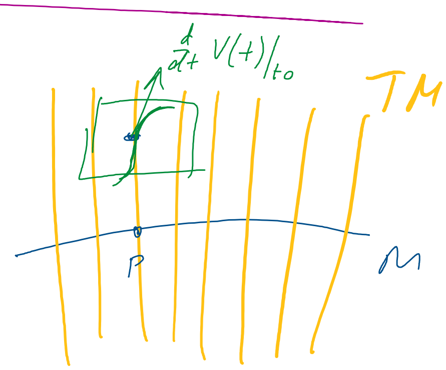
$\widetilde{V}(x_1, \dots, x_n) = V(x_1).$

Корректность — из того, что $D = \nabla^{\text{коорд}} + \Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow (\nabla_X Y)_p$ зависит только от X_p и $Y|_\gamma$,

где $\gamma'(0) = X_p$

Корректность для случая (2):



$V: I \to TM$, $p = \gamma(t_0)$

$v = V(t_0)$

V — путь в TM

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} V(t) =: V'(t_0). \quad \in TTM$$

Утв. $V'(t_0) \in T_v(T_pM)$ — т.е. "вертикальный". $V' \in \ker d\pi$

$\pi: TM \to M$, $\pi(T_pM) = p$.

$\boxed{\pi \circ V = \gamma} \Rightarrow d\pi(V'(t_0)) = \gamma'(t_0) = 0$.

Опр 2 $\quad \frac{D}{dt}\Big|_{t=t_0} V(t) = V'(t_0) \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$.

☑

В обоих случаях

$$\frac{D}{dt} V(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{d^{\text{коорд}}}{dt} V(t)\Big|_{t=t_0} + \Gamma(\gamma'(t_0), V(t_0)).$$

$$= \frac{d^{\text{коорд}}}{dt} V + \underbrace{\Gamma(\gamma', V)}_{\substack{\parallel \\ 0 \text{ во 2-м случае}}}$$

V во 2-м случае.

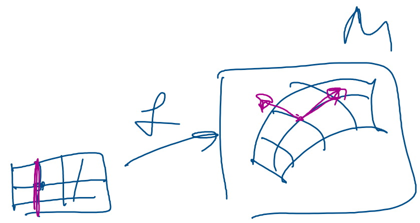
$\boxed{\text{Св-ва}}$ Обозн. $\frac{\nabla}{dt}V(t) = V'(t)$.

(1). $(V+W)' = V' + W'$

(3). $(fV)' = f'V + f\cdot V'$ $(f: I \to \mathbb{R})$.

(5). $\langle V,W\rangle' = \langle V',W\rangle + \langle V,W'\rangle$.

(4). Следствие из симметричности



$f: \mathbb{R}^2 \to M$, $f = f(x,y)$

$$\boxed{\frac{\nabla}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\nabla}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}$$

вект. поле

$$\| \quad \left(\frac{d^2 f}{\partial x\partial y}\right)^{\text{коорд}} + \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$\boxed{\text{Упр}}$ $\gamma(t)$ $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$ φ - замена параметра

$$(V\circ\varphi)'(t) = V'(\varphi(t))\cdot\underbrace{\varphi'(t)}$$

Геодезические - план

28 февраля 2021 г. 23:23

Уравнение геодезической

Определение: геодезическая.

Свойства:
- Скорость геодезической постоянна
- При линейной замене параметра геодезическая остается геодезической

Теорема: Через каждую точку в каждом направлении проходит ровно одна геодезическая.

Экспонента и радиус инъективности

Определение: экспонента (exp_p, exp)

Свойства exp_p:
- Определена на открытом множестве и гладкая
- Переводит прямые, проходящие через 0, в геодезические с сохранением длин
- Дифференциал в нуле - тождественное отображение
- (Следствие) Это локальный диффеоморфизм в нуле

Определение: радиус инъективности в точке p

Теорема: он локально отделен от нуля.

Следствие 1: локально любые две точки соединяются единственной короткой геодезической

Следствие 2: радиус инъективности отделен от 0 на любом компакте.

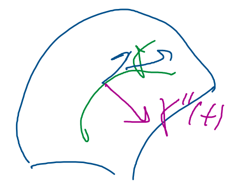
Определение: нормальные координаты, полярные координаты.

Определение и свойства

1 марта 2021 г. 22:39

Опр Пусть M — риманово мн-е, ∇ — связность Леви-Чивиты.
$\gamma: I \to M$ — гладкая кривая.
γ — <u>геодезическая</u>, если $\boxed{\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0}$ $\forall t \in I$

Было $M \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma: I \to M$ — геодезическая,
если $\forall t \in I$ $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$



Свойства

1) γ — геодезическая $\Rightarrow$ $|\gamma'| = const.$

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle' = 2\langle \underbrace{\frac{\nabla}{dt}\gamma'}_{=0}, \gamma' \rangle = 0$$

$$|\gamma'|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = const.$$

2) $a, b \in \mathbb{R}$, <u>γ — геодезическая</u>
$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at+b)$ $\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}$ — геодезическая.

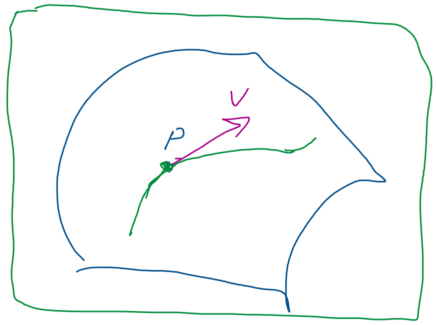
$\gamma' \neq 0$

$$\frac{\nabla}{dt}\tilde{\gamma}' = \nabla_{\tilde{\gamma}'}\tilde{\gamma}' = \nabla_{a\gamma'}(a\gamma') = a^2 \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0.$$

3) $\gamma = const \Rightarrow \gamma$ — геодезическая

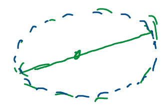
Начальные данные геодезической

1 марта 2021 г.   22:40

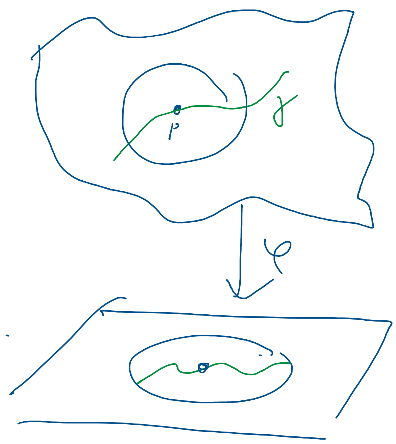


$\boxed{\text{Теорема}}$ $\forall p \in M$ $\forall v \in T_pM$ для дост. малого $\varepsilon > 0$ $\exists!$ геодезическая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ т.ч. $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$.

$\boxed{\text{Следствие}}$. $\forall p \in M$ $\forall v \in T_pM$ $\exists!$ максимальная геодезическая $\gamma : (-a, b) \to M$ $\quad (a, b \in (0, +\infty])$.



$\boxed{\text{Д-во}}$ $\varphi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$



$\varphi(p) = 0$
$p = \gamma(0)$.

$$0 = \frac{\nabla}{dt}\gamma' = \frac{d^{\text{коорд}}}{dt}\gamma' + \Gamma(\gamma', \gamma').$$

(координаты $\gamma'(t)) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$.

$$\frac{d^{\text{коорд}}}{dt}\gamma' = \sum x_i''(t) \cdot X_i(\gamma(t))$$

$$= \sum_k x_k'' \cdot X_k$$

X_i — координатные поля.

$$\Gamma(\gamma', \gamma') = \sum \Gamma_{ij}\, x_i' x_j' = \sum_{i,j,k} \left(\Gamma_{ij}^k x_i' x_j'\right) X_k.$$

Ур-е геодезической $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \dots \\ x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0 \\ \dots \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n.$$

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_n)$.

ОДУ 2-го порядка

$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x_1, \dots, x_n)$.

О.Д.У. 2-го порядка

$\exists!$ решение задачи Коши

$\gamma(0)$, $\gamma'(0)$ $\rightsquigarrow$ единственное решение

$\gamma(t)$ при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. $\boxed{/\!/}$

Из диффур. пов.

Ур-е 2-го порядка на $x_1, \dots, x_n$.

$\Updownarrow$

Ур-е 1-го порядка на $x_1, \dots, x_n, \underbrace{x_1', \dots, x_n'}_{\text{"}y_i\text{"}}$

$$\begin{cases} x_i' = y_i \\ y_i' = \dots \quad (x_i''). \end{cases}$$

Экспонента

1 марта 2021 г. 22:41

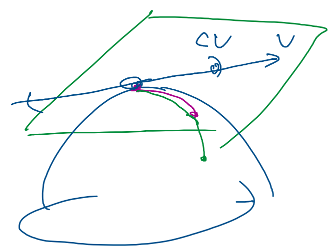
$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть M - риманово многообразие, $p \in M$.
$\boxed{\exp_p}: T_pM \to M$ определяется равенством:
для $v \in T_pM$, $\boxed{\exp_p(v) = \gamma_v(1)}$,
где γ_v - геодезическая с начальными данными
$\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$.

√ Зам. $\exp_p$ может быть определено не всюду!

$\boxed{\text{Опр}}$ $\exp : TM \to M$ (тоже частично определенное)
равно $\bigcup_{p \in M} \exp_p$.

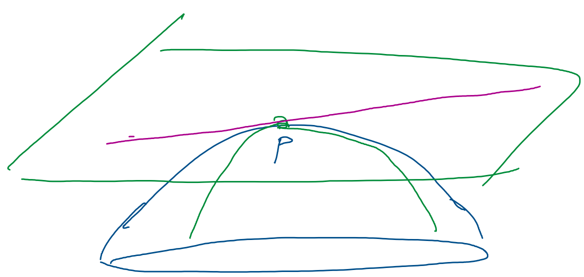
$\boxed{\text{Св-ва}}$ 1) $\exp$ определено на откр. мн-ве и C^∞
(из диффуров).

2) если $\exp_p(v)$ определено, и $c \in [0,1]$.
то $\exp_p(cv) = \gamma_v(c)$.
аналогично для $c \in (-\varepsilon, 0]$.



$$\boxed{\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct).}$$

3) $\boxed{\exp_p(tv) = \gamma_v(t)}$



Т.е. прямые в T_pM,
проходящие через 0,
переходят в геодезические,
прох. через p, с сохранением длины.

Теорема $\boxed{d_0 \exp_p = id_{T_pM}}$

$$\exp_p : T_pM \to M$$
$$d_0 \exp_p : \underbrace{T_0(T_pM)}_{\substack{\cong \\ T_pM.}} \to T_pM$$

$\boxed{\text{Д-во}}$ $v \in T_pM$

$T_p M$.

$\boxed{\text{Д-во}}$ $v \in T_p M$

$$d_0 \exp_p(v) \overset{?}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\exp_p(tv)\right) = \boxed{\begin{array}{l} s(t) = tv \\ s'(t) = v \end{array}}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_v(t) = \gamma_v'(0) = v. \qquad \boxed{\checkmark}$$

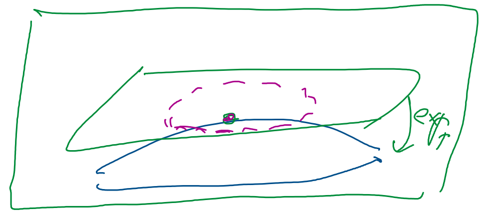
$$\boxed{\begin{array}{l} f = \exp_p. \\ df(v) = (f \circ s)'(0) \end{array}}$$

Следствие $\exp_p$ – локальный диффеоморфизм в окр-ти $0_{T_p M}$.

$\boxed{\text{Д-во}}$ По т. об обратной функции.

Радиус инъективности

1 марта 2021 г. 22:43



$\boxed{\text{Опр}}$ Радиус инъективности M в точке p

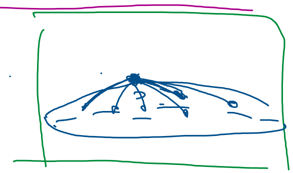
$\rho_{inj}(p) := \sup\{r>0 : \exp_p : B_r(0) \to M$ — диффеоморфизм на образ$\} > 0$

$\boxed{\text{Теорема}}$ ρ_{inj} локально отделен от 0.

т.е. $\forall p \in M$ $\exists$ окрестность $U \ni p$ т.ч.

$$\boxed{\inf_{x \in U} \rho_{inj}(x) > 0}$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\forall p \in M$ $\exists$ окрестность $U \ni p$ и $\varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x, y$ $\exists!$ геодезическая $[xy]$



$\boxed{\text{Следствие 2}}$ ρ_{inj} отделен от 0 на $\forall$ компакте. $K \subset M$

Д-во — в следующий раз!

Конец лекции 4
