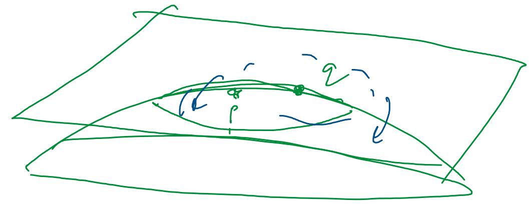
Доказательство отделенности от 0

15 марта 2021 г. 22:04

<u>Известно:</u> $\exp : TM \to M$ определено на открытом мн-ве и C^∞

$$\exp_p = \exp\big|_{T_pM}$$

$$d_0 \exp_p = id_{T_pM}.$$



<u>Надо</u>: $\exists$ окр-ть $U \ni p$ и $r > 0$ т.ч.

$\forall q \in U$ $\quad \exp_q\big|_{B_r(0)}$ — диффеоморфизм на образ.

$F : TM \to M \times M$ (частично опр).

$v \in T_xM$ $\qquad F(v) = (x, \exp_x(v))$.

(!) в 0_{T_pM} — удовл т. об обратной ф-ии

$(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{точка}}, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_n}_{\text{вектор}})$ — координаты в TM

$p = (0, \dots, 0)$.

<u>Чтб</u>. матрица $d_{0_{T_pM}} F = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline E & E \end{array}\right)$ $\quad E$ - единичная матрица $n \times n$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\begin{array}{c} E \\ \hline E \end{array}\right) \qquad F(x, 0) = (x, x)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline d_0 \exp_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline E \end{array}\right) \qquad F(p, \xi) = (p, \exp_p(\xi))$$

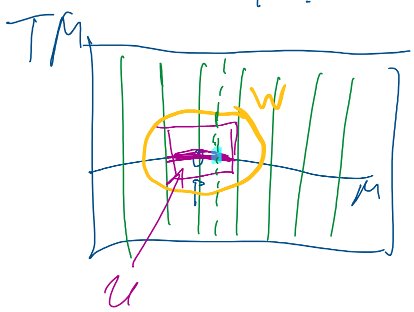
$\Rightarrow$ применима Т об обратной ф-ии.

$\exists$ окр-ть $W \ni 0_{T_pM}$, $W \subset TM$.

$F : W \to F(W)$ — диффеоморфизм на $F(W) \subset M \times M$.

TM

$F: W \to F(W)$ – диффеоморфизм на $F(W) \subset M \times M$.



$\exists$ окр-ть $U \ni p$, $U \subset M$, $r > 0$.

т. ч. $W \supset \bigcup\limits_{x \in U} B_r^{T_x M}(0)$.

Пусть

$q \in U$. $F(q, \xi) = (q, \exp_q(\xi))$

$\qquad = F|_{T_q M}(\xi)$ $\qquad$ const $\qquad$ диффео. $\blacksquare$

Нормальные и полярные координаты

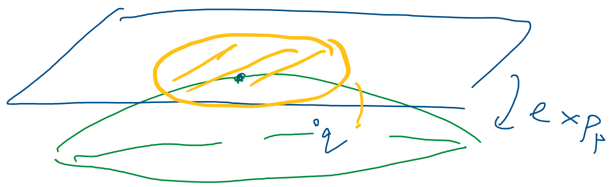
1 марта 2021 г. 22:44

Опр Пусть M — риманово многообразие, $p \in M$.

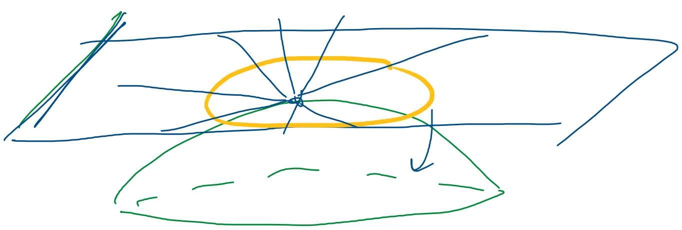
Нормальные геодезические координаты с центром p — композиция $\exp_p^{-1}$ и декартовых координат в T_pM

При $\dim M = 2$

Полярные геодезические координаты с центром p — композиция $\exp_p^{-1}$ и полярных координат на T_pM.



$$q \mapsto \underset{T_pM}{\underset{\cap}{\exp_p^{-1}(q)}} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$ — декартовы коорд в T_pM



$$\underset{M}{\underset{\cap}{q}} \mapsto \underset{T_pM}{\underset{\cap}{\exp_p^{-1}(q)}} \mapsto \underset{\text{полярные координаты.}}{(r, \varphi)}$$

Упр В нормальных координатах в 0

$$\forall i,j,k \quad \begin{cases} (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \\ \Gamma_{ij} = 0 \\ \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

Лемма Гаусса - план

Monday, March 8, 2021 3:00 PM

Определение: Вариация кривой. Поле вариации.

Теорема (лемма Гаусса): Для вариации, состоящей из геодезических фиксированной длины с фиксированным началом, поле вариации ортогонально исходной геодезической.

Следствие: Экспонента сохраняет ортогональность радиального вектора и ортогональных ему в метрике касательного пространства.

Следствие: Полярные геодезические координаты - ортогональны (компоненты матрицы метрического тензора имеют вид 1,0,0,G(x,y)).

Определение: Отрезок - кратчайший кусочно-гладкий путь между своими концами, или образ такого пути.

Теорема. Геодезическая, длина которой меньше, чем радиус инъективности в её начале, - отрезок, причем единственный с точностью до замены параметра.

Следствие 1: Геодезические - в точности локально кратчайшие кривые.

Следствие 2: Образ достаточно малой сферы с центром в 0 в касательном пространстве T_pM - метрическая сфера того же радиуса с центром p.

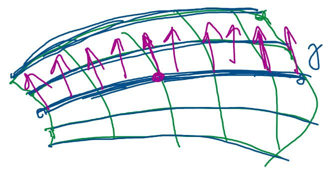
Определения

Monday, March 8, 2021 4:10 PM

$\boxed{\text{Опр}}$ (Гладкая) вариация кривой $\gamma : [a,b] \to M$ – семейство кривых $\{\gamma_s\}_{s \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ такое, что $\gamma_0 = \gamma$ и $\gamma_s(t)$ – гладкая функция от $(t, s) \in [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Поле вариации – поле V вдоль γ

$$\boxed{V(t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \gamma_s(t)}$$



Лемма Гаусса

Monday, March 8, 2021 4:11 PM

$\boxed{\text{Теорема (лемма Гаусса)}}$ Пусть M — риманово многообр-е, $p \in M$,

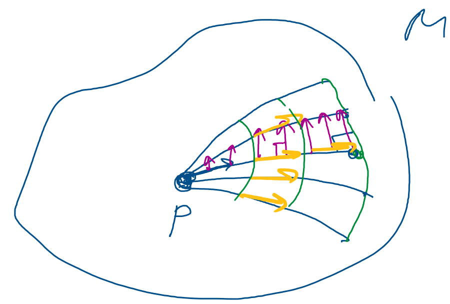
$\gamma : [0, L] \to M$ — геодезическая, $\gamma(0) = p$.

$\{\gamma_s\}$ — вариация γ, такая, что

- $\gamma_s(0) = p \quad \forall s$
- $\ell(\gamma_s) = \ell(\gamma) = L \quad \forall s.$

Пусть $V(t)$ — поле вариации

Тогда $\boxed{V(t) \perp \gamma'(t)} \quad \forall t$



$\boxed{\text{Д-во:}}$ $F(s,t) = \gamma_s(t)$, $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L] \to M.$

$$|\gamma_s'(t)| = \left| \frac{d}{dt} F(s,t) \right| = 1$$

$$V = V(s,t) = \frac{d}{ds} F(s,t)$$

$$T = T(s,t) = \frac{d}{dt} F(s,t) = \gamma_s'(t)$$

Обозначения $\frac{\nabla}{ds} \ldots =: \nabla_V \ldots$

$$\frac{\nabla}{dt} \ldots =: \nabla_T \ldots$$

Надо: $\langle V, T \rangle = 0$

Это верно при $t = 0$ (т.к $V(s,0) = 0$).

Достаточно: $\boxed{\langle V, T \rangle_t' = 0}$

Достаточно: $\boxed{\langle V, T\rangle'_t = 0}$

$$\langle V, T\rangle'_t = \langle \nabla_T V, T\rangle + \langle V, \underbrace{\nabla_T T}_{=0}\rangle =$$

ур-е геодезической

$$= \langle \nabla_T V, T\rangle = \langle \nabla_V T, T\rangle = \frac{1}{2}\langle T, T\rangle'_s = 0$$

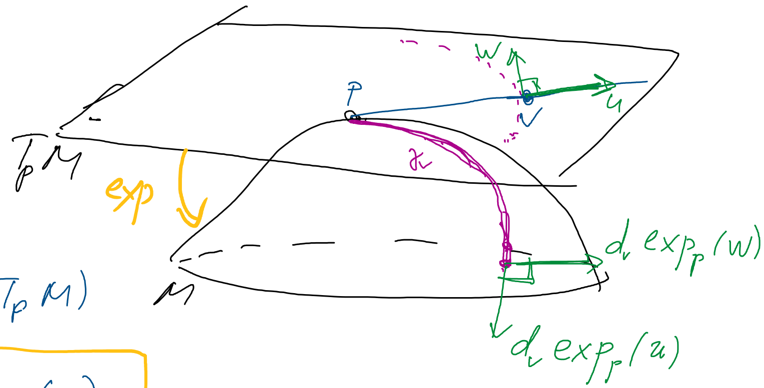
$$\boxed{\frac{\nabla}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\nabla}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$V\langle T, T\rangle = \langle \nabla_V T, T\rangle + \langle T, \nabla_V T\rangle = 2\langle \nabla_V T, T\rangle$$

$$\langle T, T\rangle'_s = 2\left\langle \frac{\nabla}{ds} T, T\right\rangle = 2\langle \nabla_V T, T\rangle.$$

Следствие об экспоненте

Monday, March 8, 2021 4:12 PM



Следствие Пусть M — риманово мн-е

$p \in M$, $v \in T_pM$.

Пусть $u, w \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$,

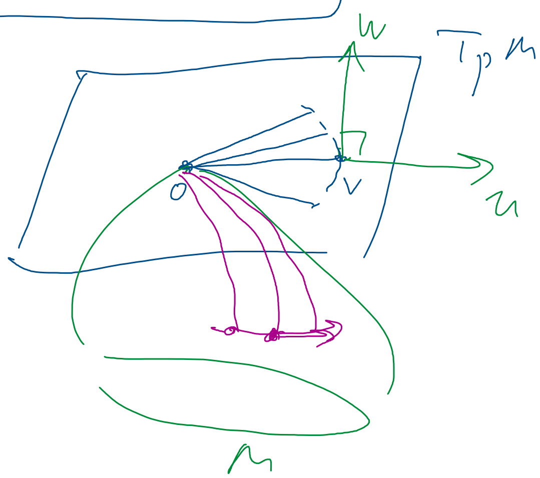
причем $u \parallel v$, $w \perp v$ (в T_pM)

Тогда $\boxed{d_v \exp_p(u) \perp d_v \exp_p(w)}$.

Следствие ($\dim M = 2$) Полярные геодезические координаты — ортогональные (т.е. координатные векторные поля ортогональны)

В полярных геодезических координатах $\boxed{(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(x,y) \end{pmatrix}}$.

Док-во След. 1



Можно считать, что $u = v$ и $|w| = |v|$.

Пусть $\gamma = \exp_p([0, v])$

$\gamma(t) = \exp_p(tv)$.

$v(s) = \cos(s) \cdot v + \sin(s) \cdot w$

$\gamma_s(t) = \exp_p(t \cdot v(s))$.

— вариация, удовл. л. Гаусса.

Из л.Г. При $t = 1$, $s = 0$.

$$d_v \exp_p(w) = \frac{d}{ds}\gamma_s(1) \perp \gamma_0'(1) = d_v \exp_p(u).$$

$$\frac{d}{ds}\gamma_s(1) = d_v \exp_p(v'(s)) = d_v \exp_p(w).$$

∎

Короткие геодезические - отрезки

Monday, March 8, 2021 4:13 PM

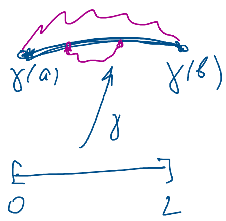
Опр <u>Отрезок</u> в M — кусочно-гладкий путь, реализующий расстояние между концами.

Т.е. такой кус. гл. путь $\gamma:[a,b]\to M$, что $\boxed{\ell(\gamma)=d(\gamma(a),\gamma(b))=\inf\{\dots\}}$

($\Longleftrightarrow$ кратчайший путь между $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$)

Также <u>отрезок</u> — образ такого пути.

$\gamma:[0,L]\to M$
$\cap$
$\mathbb{R}$

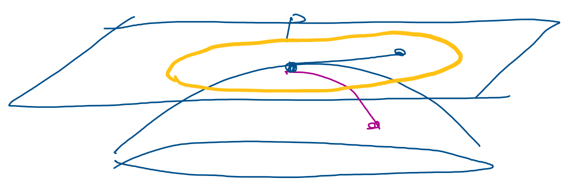


$d(\gamma(t_1),\gamma(t_2)) = |t_1-t_2|$ $\forall t_1,t_2$

Замечание $\forall$ отрезок изометричен отрезку в $\mathbb{R}$

Теорема Пусть $\gamma:[a,b]\to M$ — геодезическая, $p=\gamma(a)$

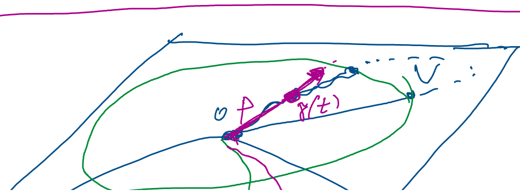
$\boxed{\ell(\gamma)<\rho_{inj}(p)}$



Тогда

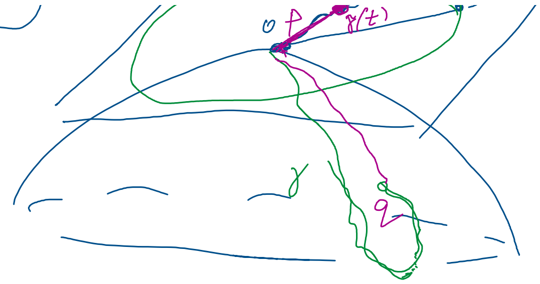
1. <u>γ — отрезок</u>
2. Это <u>единственный</u> отрезок с теми же концами (с точностью до замены параметра).

Д-во



$\gamma_0 = \exp_p([0,v])$ — условно.

$\boxed{\gamma_0(t) = \exp_p\left(t\frac{v}{|v|}\right),\ t\in[0,r]}$



- $\boxed{\gamma_0(t) = \exp_p\left(t\frac{v}{|v|}\right), \quad t\in[0,r]}$

$r := |v| < \rho_{inj}(p)$.

$q = \exp_p(v)$ — конец γ

γ — другой путь из p в q.

$a := \max\{t : \gamma(t) = p\}$.

$b := \min\{t > a : |\exp_p^{-1}(\gamma(t))| = r\}$.

Докажем, что $\ell(\gamma|_{[a,b]}) \geq r$.

$\tilde\gamma(t) := \exp_p^{-1}(\gamma(t)), \quad t \in [a,b]$.

$$\left.\begin{array}{l} \rho(t) = |\tilde\gamma(t)| \\ u(t) = \dfrac{\tilde\gamma(t)}{\rho(t)} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde\gamma(t) = \rho(t)\cdot u(t).$$

$\gamma = \exp_p \circ \tilde\gamma$.

$\gamma'(t) = d_{\tilde\gamma(t)}\exp_p(\tilde\gamma'(t))$.

$$\tilde\gamma'(t) = (\rho(t)\cdot u(t))' = \underbrace{\rho'(t)\cdot u(t)}_{\text{радиальный}} + \rho(t)\cdot\underbrace{u'(t)}_{\perp u(t)}$$

$$d_{\tilde\gamma(t)}\exp_p(\tilde\gamma'(t)) = \rho'(t)\cdot d_{\tilde\gamma(t)}\exp_p(u(t)) +$$
$$+ \rho(t)\, d_{\dots}\exp_p(u'(t))$$

ортогональны в $T_{\gamma(t)}M$

$$|\gamma'(t)| = |d_{\sim}\exp(\tilde\gamma(t))| = \sqrt{(\,\_\_\,)^2 + (\,\_\_\,)^2} \geq$$
$$\geq |\rho'(t)|\cdot\underbrace{|d_{\_\_}\exp_p(u(t))|}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = |\rho'(t)| \geq \rho'(t).$$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|\,dt \geq \int \rho' = \rho\Big|_a^b = r - 0 = r.$$

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|\, dt \geq \int \overline{\rho'} = \rho \Big|_a^b = r - 0 = r.$$

<u>Случай равенства</u>: a – начало

b – конец.

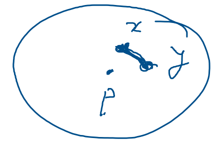
$u' \equiv 0 \Rightarrow u = \text{const}.$

$\Rightarrow \gamma(t) \in [0, v].$

$\boxed{///}$

Геодезические -локально кратчайшие

Monday, March 8, 2021 4:20 PM

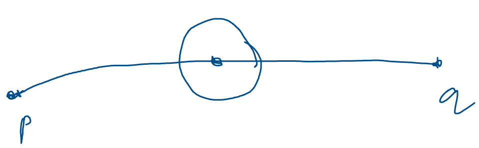


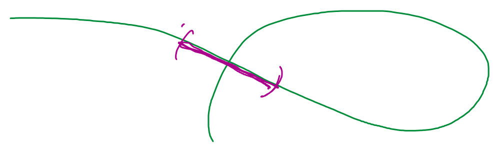
$\boxed{\text{Следствие}}$ ① $\forall\, p \in M$ $\exists$ окрестность $U \ni p$ т.ч. $\forall$ 2 точки $x, y \in U$ соединяются единственным геодезическим отрезком.

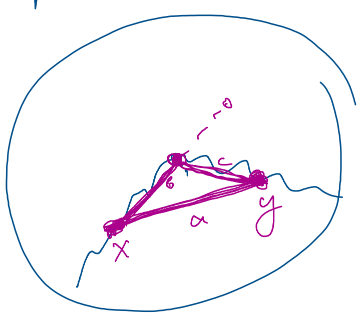
② Любой отрезок в M — геодезическая.
(Более того, любое множество, изометричное отрезку как метрическое пр-во)

③ Геодезические — в точности локально кратчайшие кривые в M

Определение: $\gamma: I \to M$ — локально кратчайшая, если $\forall\, t_0 \in I$ $\exists$ окр. $U \ni t_0$ т.ч. $\forall\, t_1, t_2 \in U$ $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ — отрезок

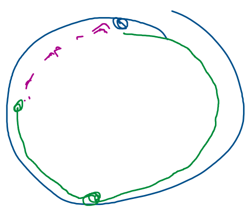






$a = b + c$

геодезическая ломаная ab — кратчайшая $\Rightarrow$ излома нет



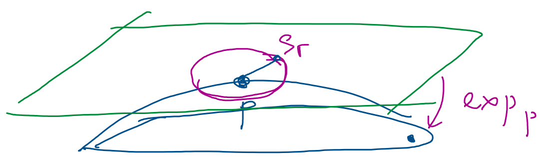
Маленькие сферы

16 марта 2021 г. 0:09

$\boxed{\text{Следствие}}$ Пусть $p \in M$, $r < \rho_{inj}(p)$,

$S_r \subset T_pM$ — сфера радиуса r с центром в O

Тогда $\exp_p(S_r)$ — сфера метрики M радиуса r с центром p



КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 5