Теорема Хопфа-Ринова - план

Monday, March 8, 2021 4:17 PM

Определение: геодезическая полнота.
Определение: метрическая полнота.

Теорема Хопфа-Ринова: Для связного риманова многообразия три свойства равносильны:

1. Оно метрически полно
2. Оно геодезически полно
3. Существует точка p, для которой $\exp_p$ определена всюду на T_pM

Из этих условий следует:

4. Для любых двух точек существует отрезок между ними.
5. Метрические шары в M - образы соответствующих шаров при экспоненте.

Начало доказательства: 1=>2=>3

Основная лемма: Предположим, что $\exp_p$ определена в замкнутом шаре радиуса R с центром в нуле, и точка q такова, что $d(p,q) \leq R$. Тогда существует отрезок между p и q (длины $d(p,q)$).

Следствие из леммы: Если $\exp_p$ определена в замкнутом шаре радиуса R с центром в 0, то его образ - метрический шар того же радиуса в M с центром в p.

Завершение доказательства теоремы Хопфа-Ринова.

Определения

15 марта 2021 г. 22:44

Пусть M – связно $\Longrightarrow$ $\boxed{\forall x, y \in M \quad d(x,y) < \infty}$

Опр M – метрически полное, если оно полно как метрическое пространство ($\forall$ фундаментальная последовательность имеет предел).

Опр M – геодезически полное, если exp определено всюду на TM

($\Longleftrightarrow$ $\forall$ геодезическая продолжается до бесконечной длины в обе стороны).

Формулировка и начало доказательства

15 марта 2021 г. 23:19

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Хопфа - Ринова). Пусть M связно, $M \neq \emptyset$.

Тогда равносильны 3 условия:

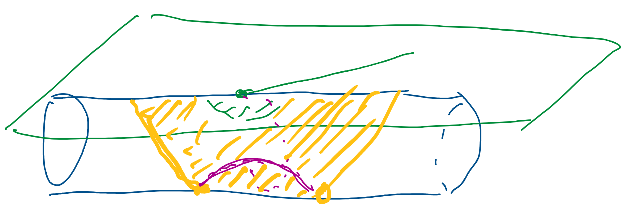
- (1) M метрически полно
- (2) M геодезически полно
- (3) $\exists p \in M$: $\exp_p$ определено всюду на T_pM
  (т.е. $\forall$ геодезическая из p продолжается до ∞)

Кроме того, из (1)-(3) следует

! (4) $\forall\, p, q \in M$ $\exists$ отрезок между p и q

- (5) $\forall p \in M$ $\forall R > 0$
  замкнутый шар $\overline{B}_R(p)$ в M
  равен $\exp_p(\overline{B}_R(0))$.

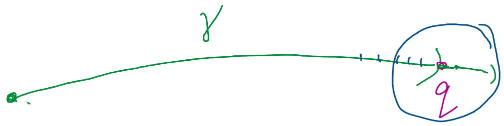
(3) $\Rightarrow$ $(4)_p$: $\forall q\ \exists$ отр $[pq]$
$\Downarrow$
$(5)_p$: $\overline{B}_R(p) = \exp_p(\overline{B}_R(0))$
$\Rightarrow$ (1)



(2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

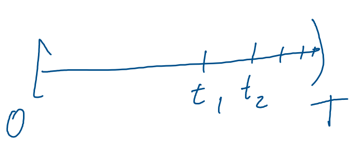
(1) $\Rightarrow$ (2) M метрически полно $\overset{?}{\Longrightarrow}$ M геод. полно

$\gamma : [0, T) \to M$ — макс. $\overbrace{\text{продолженная}}^{\text{нат. парам}}$ геод., $T < \infty$



$t_k \nearrow T$

$\{\gamma(t_k)\}$ — фундаментальна.



$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq$

$\leq \ell(\gamma|_{[t_i, t_j]}) = |t_i - t_j|$

$$\leq \ell\left(\gamma\big|_{[t_i,t_j]}\right) = |t_i - t_j|.$$

$$\Rightarrow \exists\ q := \lim \gamma(t_k) \qquad \blacksquare$$

Основная лемма

15 марта 2021 г. 23:22

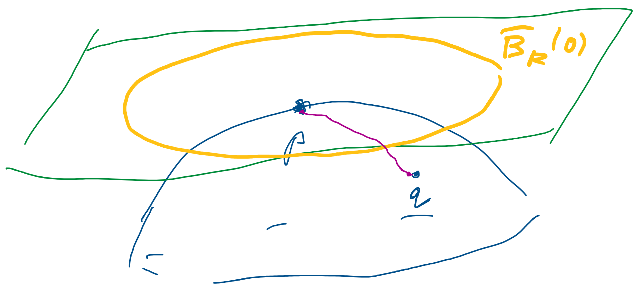
Лемма Пусть M – риманово многообразие, $p \in M$

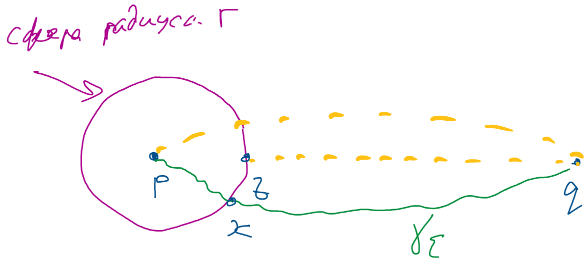
$R > 0$ – такое, что $\exp_p$ определена

в замкнутом шаре $\overline{B_R(0)} \subset T_pM$.

Тогда $\forall q \in M$ $\quad d(p,q) \leq R \Rightarrow \exists$ отрезок между p и q

---





$D := d(p,q)$

$r > 0$ – дост. мал.:

$$\begin{cases} r < \rho_{inj}(p) \\ r < d(p,q) \end{cases}$$

S_r – сфера в M радиуса r.

$z \in S_r$ – такая, что

$d(z,q) = \min\{d(x,q) : x \in S_r\}$.

Утв. $\quad d(z,q) = D - r$.

Д-во: $\quad d(z,q) = \inf\{d(x,q) : x \in S_r\}$

Нер-во $\Delta \Rightarrow \quad d(z,q) \geq d(p,q) - d(p,z) = D - r$.

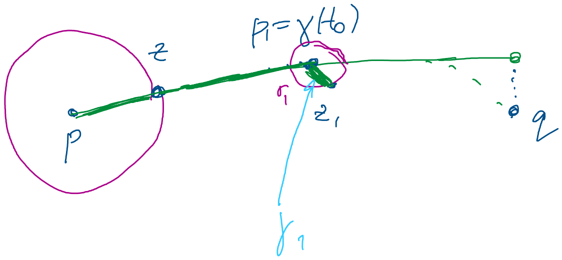
$\leq$ $\quad \exists\ \varepsilon > 0$. $\quad \exists$ крив γ_ε, соед p и q, $\ell(\gamma_\varepsilon) < D + \varepsilon$

$\exists\ x_\varepsilon \in S_r \cap \gamma_\varepsilon$

$$d(x_\varepsilon, q) \leq \ell\left(\gamma_\varepsilon\big|_{\text{от } x_\varepsilon \text{ до } q}\right) \leq$$

$$\leq \ell(\gamma_\varepsilon) - r \leq D + \varepsilon - r$$

$\Rightarrow \inf\{\ \} \le D - r$ ☒

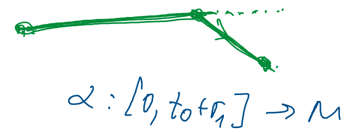


$\exists$ геод, нат. парам.

$\gamma : [0, D] \to M.$

т.ч. $\gamma(0) = p.$

$\gamma(r) = z$



<u>Цель:</u> $\gamma(D) = q.$

$\Sigma = \{t \in [0,D] : d(\gamma(t), q) = D - t\}.$

$t_0 = \sup \Sigma, \quad t_0 \in \Sigma \quad (\Sigma$ - замк).

$t_0 \geq r \quad (r \in \Sigma)$

$p_1 = \gamma(t_0).$, Если $t_0 = D \Rightarrow$ ok.

предпол. $t_0 < D$, $p_1 \neq q$.

Аналогично для p_1 вместо p.

z_1 – ближ. к q точка на $S_{r_1}(p_1)$.

$\gamma_1 = [p_1, z_1]$

<u>Верно:</u> $d(z_1, q) = d(p_1, q) - r_1 =$

$= D - t_0 - r_1$ (*)

$\boxed{1 \text{ случай}}$ $\gamma_1 \subset \gamma \Rightarrow t_0 + r_1 \in \Sigma.$ ✕

$t_0 \neq \sup.$

$\boxed{2 \text{ случай}}$ $\gamma_1 \not\subset \gamma.$

α – путь $\gamma|_{[0,t_0]} \cup \gamma_1$ – линия с изломом в p_1

$\Rightarrow$ α — не кратчайшая

$\Rightarrow$ $d(p, z_1) < \ell(\alpha) = t_0 + r_1$

$\Rightarrow$ $d(p,q) \leq d(p, z_1) + d(z_1, q) \overset{(*)}{<}$

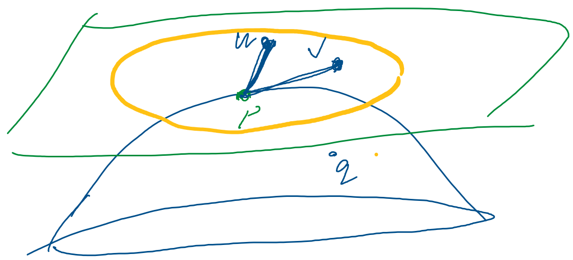
$< t_0 + r_1 + D - t_0 - r_1 = D.$

$\blacksquare$

Следствие из леммы

15 марта 2021 г. 23:24

$\boxed{\text{Следствие}}$ Если $\exp_p$ определена в шаре $\overline{B}_R(0) \subset T_pM$, то $\exp_p(\overline{B}_R(0))$ — метрический шар $\overline{B}_R(p) \subset M$



1) $\subset$

$v \in \overline{B}_R(0) \subset T_pM$

$\exp_p([0,v])$ — геодезическая γ_v. длины $|v|$.

$d(p, \exp_p(v)) \leq \ell(\gamma_v) = |v| \leq R$

2) $q \in \overline{B}_R(p) \subset M$ По лемме $\exists$ отрезок $\gamma = [pq]$

$\gamma = \exp_p([0w])$, $|w| = \ell(\gamma) = d(p,q) \leq R$.

$\Rightarrow w \in \overline{B}_R(0) \subset T_pM$. $\boxed{q = \exp_p(w)}$

Окончание доказательства

16 марта 2021 г. 0:40

По основной лемме из (3) следует (4) и (5) для одной точки p.

$\Rightarrow \forall R>0$ $\overline{B}_R(p)$ – компактно (образ компакта).

$\Rightarrow$ $\overline{B}_R(p)$ полно $(\forall R>0)$

$\Rightarrow$ M полно $\boxtimes$

Тензор кривизны - план

22 марта 2021 г.   22:35

Тензор кривизны

Определение: преобразование кривизны, тензор кривизны

Теорема: это действительно тензор.

Теорема: R кососимметричен и по первой, и по второй паре аргументов.

Задача: тождество Якоби, симметричность относительно перестановки первой и второй пары аргументов.

Тензор кривизны в размерности 2

Теорема: В размерности 2 тензор кривизны описывается одним числом K=K(p), а именно, <R(X,Y)Z,T> = -K(X^Y)(Z^T), где ^ - "внешнее произведение" относительно произвольного выбора ориентации.

Определение: число K(p) - внутренняя кривизна M в точке p.

Упражнение: R(X,Y)Z - поворот Z на прямой угол в направлении от X к Y с умножением на -K[X,Y]

Теорема Гаусса (напоминание): для поверхности в R^3 число K(p) совпадает с гауссовой кривизной.

Определение тензора кривизны

22 марта 2021 г. 22:51

$\boxed{\text{Опр}}$ Пусть M – риманово многообразие.

Преобразование кривизны M – тензор R типа $(3,1)$,

$$\underset{\mathfrak{X}(M)^3}{\underset{\cap}{(X,Y,Z)}} \longmapsto \underset{\mathfrak{X}(M)}{\underset{\cap}{R(X,Y)Z}}$$

$$\boxed{R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z}$$

Тензор кривизны – тензор типа $(4,0)$

$$(X,Y,Z,T) \longmapsto \langle R(X,Y)Z, T\rangle$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Это действительно тензоры.

Д-во: Надо: $R(X,Y)(fZ) = f\cdot R(X,Y)Z$

$$\overset{\shortparallel}{R(fX,Y)Z} = R(X,fY)Z.$$

$f \in \mathcal{F}(M)$ = { функции $M \to \mathbb{R}$ }

$\mathfrak{X}(M)$ = { вект. поля на M }

1) Тензорность по Z

$$R(X,Y)(fZ) = \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ).$$

(1A) $\nabla_X \nabla_Y (fZ) = \nabla_X \left(f\cdot \nabla_Y Z + \overset{\overset{D_Y f}{\shortparallel}}{(Yf)}\cdot Z\right) =$

$$= f\cdot \nabla_X \nabla_Y Z + \cancel{(Xf)\cdot \nabla_Y Z} + \cancel{(Yf)\nabla_X Z} + (XYf)\cdot Z$$

(1B) $\nabla_Y \nabla_X (fZ) =$

$$= f\, \nabla \nabla Z + \cancel{(Yf)\cdot \nabla Z} + \cancel{(Xf)\nabla} Z + (YXf)\cdot Z$$

$$\text{(1B)}\quad \nabla_Y \nabla_X (fZ) =$$

$$= f\, \nabla_Y \nabla_X Z + \cancel{(Yf)\cdot \nabla_X Z} + \cancel{(Xf)\, \nabla_Y Z} + (YXf)\cdot Z$$

Разность $\quad \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) =$

$$= f\cdot \left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z\right) + \left(\cancel{[X,Y]f}\right) Z.$$

$$\text{(1C)}\quad \nabla_{[X,Y]} (fZ) = f\cdot \nabla_{[X,Y]} Z + \left(\cancel{[X,Y]f}\right)\cdot Z$$

$$\Rightarrow \text{1A} - \text{1B} - \text{1C} = f\cdot\left(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right)$$

$$= f\cdot R(X,Y)Z$$

(2) Тензориальность по Y.

$$R(X,fY)Z = \nabla_X \nabla_{fY} Z - \nabla_{fY}\nabla_X Z - \nabla_{[X,fY]} Z.$$

$$+\ \text{(2A)}\quad \nabla_X \nabla_{fY} Z = \nabla_X (f\cdot \nabla_Y Z) = f\cdot \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf)\cdot \nabla_Y Z.$$

$$-\ \text{(2B)}\quad \nabla_{fY}\nabla_X Z = f\cdot \nabla_Y \nabla_X Z$$

Скобка Ли $\quad [X, fY] = f[X,Y] + (Xf)\cdot Y.$

$$-\ \text{(2C)}\quad \nabla_{[X,fY]} Z = \nabla_{f[X,Y] + (Xf)\cdot Y} Z =$$

$$= f\cdot \nabla_{[X,Y]} Z + (Xf)\cdot \nabla_Y Z$$

(3) Тензориальность по X:

$$R(X,Y) = -R(Y,X)$$

$\square$

Симметрии тензора кривизны

22 марта 2021 г. 22:51

$\forall X, Y, Z, T.$

Теорема $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z,T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

Док-во

① $R(X,Y) = -R(Y,X)$ — из определения и $[X,Y] = -[Y,X]$

② Кососимметричность $R(X,Y): T_pM \to T_pM$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0} \qquad \forall Z$$

Дифференцируем $\langle Z, Z\rangle$

(1) $Y\langle Z,Z\rangle = 2\langle \nabla_Y Z, Z\rangle$

(2) $XY\langle Z,Z\rangle = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad ||$

(3) Аналогично для $X \leftrightarrow Y$

$YX\langle Z,Z\rangle = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle$

(4) Вычитаем (2) и (3) и делим на 2, и меняем право и лево

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = \frac{1}{2}\left(XY\langle Z,Z\rangle - YX\langle Z,Z\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle.$$

(5) $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle \overset{(4)}{=} 0$

$\boxed{//}$

$\boxed{\text{Задача}}$ $\quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

1) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

тождество Якоби, 1-е тождество Бьянки.

2) $\langle R(\underbrace{X,Y})\underbrace{Z,T} \rangle = \langle R(\underbrace{Z,T})\underbrace{X,Y} \rangle$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 6