Двумерный случай

22 марта 2021 г. 22:51

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $\dim M = 2$. Тогда $\forall p \in M$ $\exists K = K(p) \in \mathbb{R}$

т.ч. $R = R_p$ имеет вид

$$\boxed{\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -K \cdot (X \wedge Y) \cdot (Z \wedge T)}$$

где $X \wedge Y$, $Z \wedge T$ — внешнее произведение (ор. площадь)

$\boxed{\text{Д-во}}$ $\forall$ билинейная кососимм. $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ имеет вид $B(X,Y) = C \cdot (X \wedge Y)$ для нек-рого $C \in \mathbb{R}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle R(X,Y)Z, T\rangle = \underline{C(X,Y)} \cdot (Z \wedge T) = \underline{C_1 \cdot (X \wedge Y)} \cdot (Z \wedge T)$

Положим $K = -C_1$ $\boxed{\text{Q.E.D.}}$

$\boxed{\text{Упражнение}}$ $\underline{R(X,Y)}Z = -K \cdot (X \wedge Y) Z^{\perp}$,

где $Z^{\perp}$ — результат поворота Z на угол $\pi/2$ в направлении от X к Y

$\boxed{\text{Опр}}$ $K(p)$ — внутренняя кривизна M в точке p

$\boxed{\text{Замечание}}$ $K(p) = -\dfrac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X \wedge Y|^2} = \boxed{\dfrac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2}}$

$\forall$ лин. нез. $X, Y \in T_pM$.

$X, Y \in \mathbb{R}^2$

$X \wedge Y = \det[X, Y] = [X, Y]$

не скобка Ли!

Внутренняя и гауссова кривизна

22 марта 2021 г. 22:52

Теорема Для вложенного подмногообразия $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ внутренняя кривизна = гауссова кривизна

Док-во Из теоремы Гаусса гауссова кривизна равна

$$\boxed{K_{\text{гаус}} = \frac{\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle}{\det I}}$$

, где X, Y — координатные поля

Числитель $= \langle R(X,Y)Y, X \rangle$ т.к. $[X,Y]=0$.

$\det I = |X \wedge Y|^2$ — квадрат площади 

$= \det(g_{ij})$.

$$\Rightarrow \quad K_{\text{гаус.}} = \frac{\langle R(X,Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2} = K_{\text{внутр.}}$$

(из предыдущей страницы)

Полугеодезические координаты - план

22 марта 2021 г.   22:54

Определение: полугеодезические координаты.

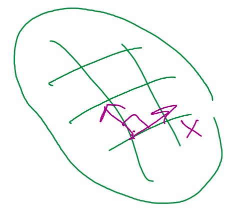
Формулы: Символы Кристоффеля, дифференцирование нормированного координатного поля.

Теорема (двумерное уравнение Якоби): Формула для кривизны в полугеодезических координатах.

Теорема: Кривизна плоскости Лобачевского равна -1.

Определение

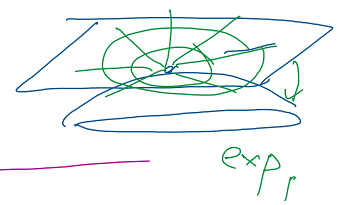
22 марта 2021 г. 23:09



Опр Пусть M — 2-мерное риманово многообразие.
Система координат (карта) — полугеодезическая,
если матрица (g_{ij}) в этих координатах
имеет вид $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}}$, где G - некоторая функция.

Переформулировка: Для координатных полей X, Y

$$|X| = 1, \quad \langle X, Y \rangle = 0$$

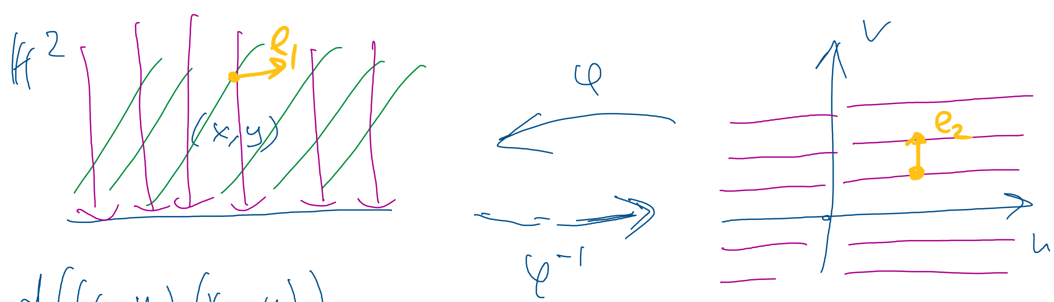


Примеры 1) Полярные координаты.

2) Для H^2 в верхней полуплоскости $\{(x,y) : y>0\}$
введем новые координаты u, v, т.ч.

$$\boxed{x = v, \quad y = e^u}$$

Они полугеодезические, $\boxed{(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2u} \end{pmatrix}}$



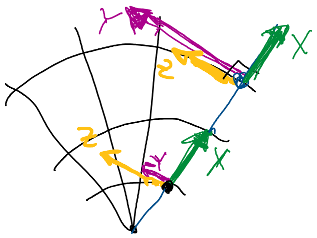
$$d\big((x_0, y_1), (x_0, y_2)\big) =$$
$$= |\ln(y_1) - \ln(y_2)|$$

Символы Кристоффеля

22 марта 2021 г. 23:09

Обозначения

Пусть зафиксирована полугеодезическая система координат (x, y).



X, Y — координатные поля $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$

$$Z = \frac{Y}{|Y|} = \frac{Y}{\sqrt{G}}$$

$$\boxed{(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(x,y) \end{pmatrix}}$$

Теорема

✓(1) $\boxed{\nabla_X X = 0}$

✓(2) $\nabla_X Y = \nabla_Y X = \frac{G'_x}{2G} \cdot Y$

упр. (3) $\nabla_Y Y = -\frac{G'_x}{2} X + \frac{G'_y}{2G} Y$

√(4) $\boxed{\nabla_X Z = 0}$

✓(5) $\nabla_Y Z = -(\sqrt{G})'_x \cdot X$

$$\boxed{\langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle = \frac{1}{2}\left((g_{ik})'_{x_j} + (g_{jk})'_{x_i} - (g_{ij})'_{x_k} \right)}$$

Следствие (из (1)):

Первые координатные линии — геодезические

Д-во теоремы

$|X| = 1$

$$\left.\begin{aligned} V\langle X, X\rangle &= 0 \\ &\parallel \\ 2\langle \nabla_V X, X\rangle& \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla_V X \perp X \Rightarrow \nabla_V X \parallel Y, Z.$$

(1) Аналогично $\nabla_V Z \perp Z \Rightarrow \nabla_V Z \parallel X$

1 Аналогично $\nabla_V Z \perp$ [illegible]

$$? \ \langle \nabla_X X, Y \rangle = X\underbrace{\langle X, Y\rangle}_{=0} - \overbrace{\langle X, \underbrace{\nabla_X Y}_{= \nabla_Y X \perp X} \rangle}^{=0} = 0.$$

$$\langle \nabla_X X, X \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_X X = 0$$

4 $\nabla_X Z = ?$ $\qquad \nabla_X Z \perp Z, Y$

$$\langle \nabla_X Z, X \rangle = X\underbrace{\langle Z, X\rangle}_{=0} - \langle Z, \underbrace{\nabla_X X}_{=0} \rangle = 0$$

5 $\nabla_Y Z = ?$ $\qquad \nabla_Y Z \perp Z$

$$\langle \nabla_Y Z, X \rangle = Y\underbrace{\langle Z, X\rangle}_{=0} - \langle Z, \underbrace{\nabla_Y X}_{\text{п. } 2} \rangle = \boxed{-\left(\sqrt{G}\right)'_x}$$

2 $$\nabla_Y X = \nabla_X Y = \nabla_X \left(\sqrt{G}\, Z\right) = \left(\sqrt{G}\right)'_x \cdot Z + \underbrace{\sqrt{G}\, \nabla_X Z}_{=0}$$

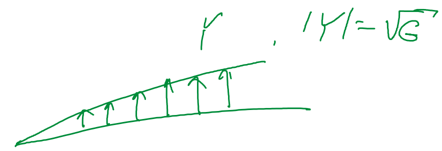
Кривизна (уравнение Якоби)

22 марта 2021 г.   23:09

$\boxed{\text{Теорема}}$ (2-мерное уравнение Якоби).

В полугеодезических координатах (x,y)

$$\boxed{K = -\frac{(\sqrt{G})''_{xx}}{\sqrt{G}}}$$



$\boxed{\text{Д-во}}$

$$K = -\frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X\wedge Y|^2} \qquad |X\wedge Y|^2 = \det(g_{ij}) = G$$

$$R(X,Y)X = \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \underbrace{\nabla_X X}_{=0} - \nabla_{\underbrace{[X,Y]}_{=0}} X =$$

$$= \nabla_X \underbrace{\nabla_Y X}_{=\nabla_X Y} = \nabla_X \nabla_X Y =$$

$$= \nabla_X \underbrace{\nabla_X (\sqrt{G}\cdot Z)} = \nabla_X\left((\sqrt{G})'_x \cdot Z + \sqrt{G}\cdot \underbrace{\nabla_X Z}_{=0}\right) =$$

$$= \nabla_X\left((\sqrt{G})'_x \cdot Z\right) = (\sqrt{G})''_{xx}\cdot Z = (\sqrt{G})''_{xx}\,\frac{Y}{\sqrt{G}}$$

$$K = -\frac{(\sqrt{G})''_{x}\cdot \langle \frac{Y}{\sqrt{G}}, Y\rangle}{G} = -\frac{(\sqrt{G})''_{xx}\cdot\sqrt{G}}{G} = -\frac{(\sqrt{G})''_{xx}}{\sqrt{G}}$$ ▨

Кривизна плоскости Лобачевского

22 марта 2021 г. 23:09

$\boxed{\text{Теорема}}$ Кривизна $\mathbb{H}^2$ равна -1 во всех точках

$\boxed{\text{Док-во}}$ $\exists$ координаты (u,v), в которых

$\boxed{(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2u} \end{pmatrix}}$ $\boxed{G = e^{-2u}}$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{G} &= e^{-u} \\ (\sqrt{G})''_{uu} &= e^{-u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{K = -\frac{(\sqrt{G})''_{uu}}{\sqrt{G}}} = -1$$

$\square$

Кривизна и метрика - план

29 марта 2021 г. 13:45

Метрика в полярных координатах

Напоминание: полярные координаты - полугеодезические.

Наблюдение: Уравнение Якоби можно рассматривать как дифференциальное уравнение на метрику.

Теорема: Начальные данные уравнения Якоби в полярных координатах.

Метрики постоянной кривизны

Теорема: Пусть M и N - двумерные римановы многообразия одинаковой постоянной кривизны K, p и q - точки из M и N соотвественно, r>0 меньше радиусов инъективности M и N в точках p и q. Тогда шары радиуса r с центрами p и q изометричны.

Следствие: Поверхность постоянной кривизны K=0 локально изометрична плоскости, постоянной кривизны K>0 - сфере соответствующего радиуса, K<0 - перемасштабированной плоскости Лобачевского.

Сравнение метрик с помощью кривизны

Теорема: асимптотическое разложение длины окружности и площади круга в нуле

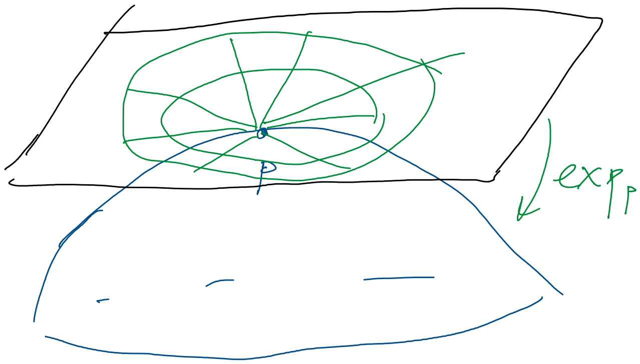
Теорема.

1. Если K>=0, то exp_p в пределах радиуса инъективности не увеличивает длины гладких кривых. Как следствие, не увеличивает площади и расстояния.
2. При K<=0 - наоборот, не уменьшает (расстояния - только в пределах половины радиуса инъективности).

Теорема. Сравнение углов для маленьких треугольников: при K>=0 их углы не меньше углов треугольника сравнения, при K<=0 - не больше.

Уравнение Якоби в полярных координатах

30 марта 2021 г. 0:16

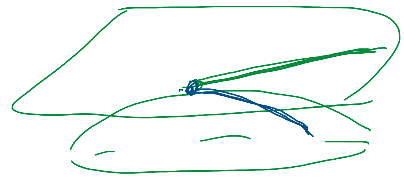


Полярные геодезические координаты (x, y)

x — радиальная

y — угловая

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$



Ур-е Якоби: $$\boxed{K = -\frac{(\sqrt{G})''_{xx}}{\sqrt{G}}}$$

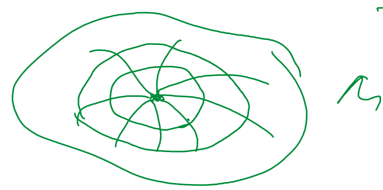
$$\Updownarrow$$

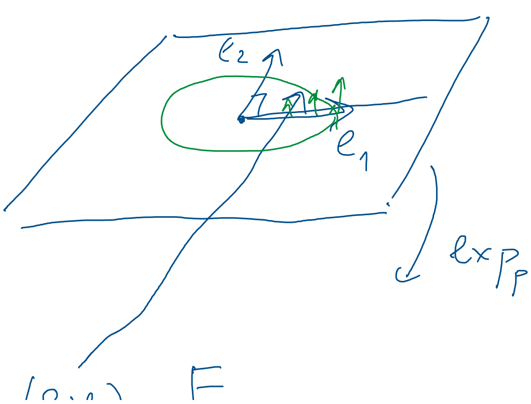
$$\boxed{(\sqrt{G})''_{xx} = -K \cdot \sqrt{G}}$$ — О.Д.У. на $\sqrt{G}$!

$\boxed{\text{Теорема}}$ (начальные данные ур-е Якоби в полярных геод координатах на M.)

В полярных координатах (x, y) при фикс $y = y_0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{G} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{G})'_x = 1 \end{cases}$$





Пусть $y_0 = 0$

$e_1, e_2 \in T_p M$

ортонорм базис

e_1 — скорость геод. $\gamma(t) = \begin{cases} y = y_0 = 0, \\ x = t \end{cases}$

$\gamma(t) = \quad x = t$

$$(\rho,\varphi) \xrightarrow{F} \rho\cos\varphi\, e_1 + \rho\sin\varphi\, e_2$$

$$\sqrt{G} = |Y|$$

$$Y = d_{\dots}\exp_p\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)$$

$$\left.\frac{dF}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \rho\cdot e_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\exp_p \rightsquigarrow f: \mathbb{R}^2 \to \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{array}}$$

$$Y(\rho,0) = d_{\rho e_1}\exp_p(\rho e_2) = \rho\, d_{\rho e_1}\exp_p(e_2)$$

$\rho \to x$

$$Y(x,0) = X\cdot \underbrace{d_{xe_1}\exp_p(e_2)}_{\downarrow}. \quad \text{при } x\to 0$$

$$0 \qquad d_0\exp_p(e_2) = e_2 \qquad (d_0\exp_p = Id).$$

$$|Y| \to 0$$

$$\frac{|Y|}{x} \longrightarrow |e_2| = 1$$

$$\frac{f(x)}{x} \to 1 \quad \text{при } x\to 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(0) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{G}(x, y_0) \\ f'' = -K\cdot f \\ \text{продолжение как решение} \\ \text{на } x = 0\end{array}}$$

$\boxtimes$

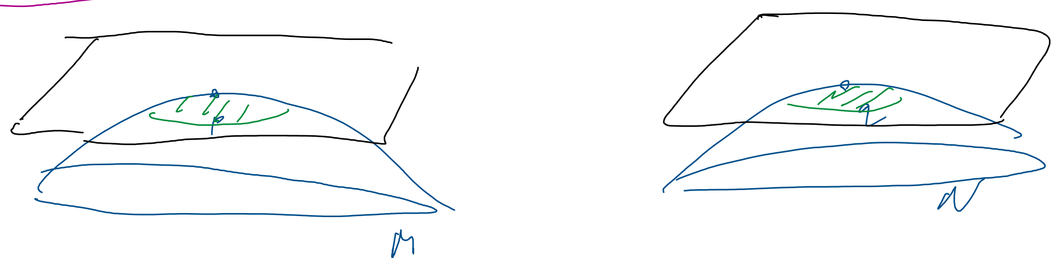
Метрики постоянной кривизны

30 марта 2021 г. 0:16

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть M, N — 2-мерные римановы мн-я, постоянной кривизны $K \in \mathbb{R}$.

$p \in M$, $q \in N$, $r > 0$, $r < \min\{\rho_{inj}^M(p), \rho_{inj}^N(q)\}$.

Тогда шары $B_r(p) \subset M$ и $B_r(q) \subset N$ изометричны



$K_M = K_N \equiv K$

$$\begin{cases} (\sqrt{G})''_{xx} = -K\sqrt{G} \\ (\sqrt{G})\big|_{x=0} = 0 \\ (\sqrt{G})'_x\big|_{x=0} = 1 \end{cases}, \quad K = \text{const}$$

$\sqrt{G} = \sqrt{G}(x, y)$

$K = 0 \qquad \sqrt{G} = x$

$K = 1 \qquad \sqrt{G} = \sin x$

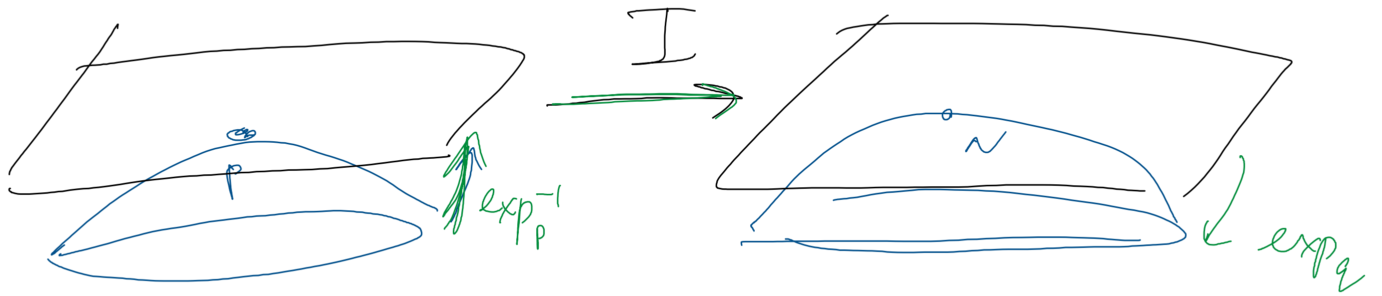
$K > 0 \qquad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} x)$

$K < 0 \qquad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\, x).$

$K = -1 \qquad G = \sinh(x).$

$k = 1$ $\quad G = \sin(x)$.

— одно и то же для M и N.



$I : T_pM \to T_qN$ — лин. изометрия

$F: M \to N$ (вокр-ти p)

$$\boxed{F = \exp_q \circ I \circ \exp_p^{-1}}.$$

F — изометрия ($\in C^\infty$, сохр. скал. пр-е).

вне центра — из совпадения (g_{ij}) в пол. коорд.

в центре $\quad dF = \underbrace{d_0 \exp_q}_{\text{лин. изом.}} \circ \underbrace{I}_{\text{лин. изом.}} \circ \underbrace{(d_0 \exp_p)^{-1}}_{\text{лин. изом.}}$

Модельные поверхности

30 марта 2021 г. 0:33

Следствие Пусть M^2 – риманово многообразие постоянной кривизны K. Тогда оно локально изометрично:

- При $K=0$ — $\mathbb{R}^2$
- При $K=1$ — S^2 (единичная сфера в $\mathbb{R}^3$)
- При $K>0$ — $\frac{1}{\sqrt{K}} S^2$ (сфера радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$ в $\mathbb{R}^3$)
- При $K=-1$ — $\mathbb{H}^2$
- При $K<0$ — $\frac{1}{\sqrt{|K|}} \mathbb{H}^2$

Опр Гомотетия риманова мн-я $M=(M,\underline{\underline{g}})$ с коэффициентом λ – это

$$\boxed{\lambda M = (M, \lambda^2 \underline{\underline{g}})}$$

Свойство При гомотетии с к-том λ кривизна делится на λ^2

$$\boxed{K_{\lambda M} = \frac{1}{\lambda^2} K_M}$$

При замене $g \to \lambda^2 g$. $X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle \cdot \lambda$ $\cdot\lambda$ $+ \langle Y, \nabla_X Z\rangle \cdot\lambda$

∇ – сохраняется

$\langle R(X,Y)Y,X\rangle \cdot \lambda^2$ K_M

∇ — сохраняется

$$K_{\lambda M} = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle \cdot \lambda^2}{|X \wedge Y|^2 \cdot \lambda^4} = \frac{K_M}{\lambda^2}$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 7