Кривизна и эйлерова характеристика

30 марта 2021 г. 2:10

Пусть M — замкнутое (компактное без края) риманово многообразие.

Определение слова "замкнутое многообразие"

Напоминание Эйлерова характеристика

$$\boxed{\chi(M) = V - E + F}$$

где V — число вершин

E — число ребер

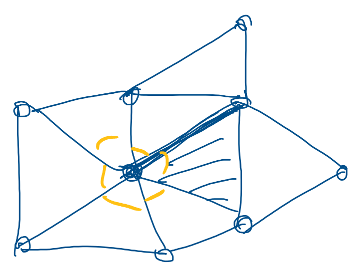
F — число граней (областей). (любого разбиения графом на диски)

Теорема Пусть M — замкнутое 2-мерное риманово многообразие

Тогда

$$\boxed{\int_M K\,dA = 2\pi\cdot\chi(M)}$$

Без док-ва: M можно триангулировать



V — число вершин

E — число ребер

E – число ребер

F – число тр-ков

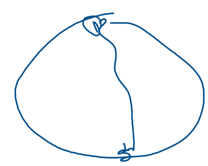
$$\boxed{E = \frac{3}{2} F}$$

Δ_i – i-й треугольник $(i = 1, \dots, N)$

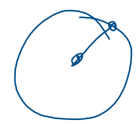
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – его углы — || —

$$+\left\{ \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi + \int_{\Delta_i} K\, dA \qquad i = 1 \dots N. \right.$$

$$2\pi \cdot V = \pi \cdot F + \int_M K\, dA \qquad (*).$$



$$\int_K K\, dA = 2\pi \cdot V - \pi F = 2\pi \cdot \chi(M)$$



$$\boxed{\chi(M) = V - E + F = V - \frac{3}{2} F + F = V - \frac{1}{2} F}$$

Добавление: метрики постоянной кривизны на замкнутых поверхностях

5 апреля 2021 г. 22:37

Теорема На любой замкнутой поверхности M можно ввести риманову метрику постоянной кривизны.

2-мерное мн-е.

Знак кривизны равен знаку $\chi(M)$

Напоминание Какие бывают поверхности.

M_p – сфера с p ручками $(p \geq 0)$

N_q – сфера с q плёнками $(q \geq 1)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\chi(M_p) = 2 - 2p \\ \chi(N_q) = 2 - q\end{gathered}}$$

Ручка + плёнка ⇝ 3 плёнки

① $\chi(M) > 0 \iff \left[\begin{array}{l} M \simeq M_0 = S^2 \\ M \simeq N_1 = \mathbb{R}P^2 \end{array}\right.$

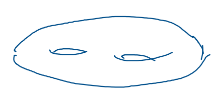
$\chi(S^2) = 2$

$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$

② $\chi(M) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} M \simeq M_1 = \mathbb{T}^2 \text{ (тор)} \\ M \simeq N_2 = K^2 \text{ (бутылка Клейна)} \end{array}\right.$

③ $\chi(M) < 0$ – все остальные

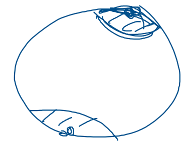
$\left[\begin{array}{l} M = M_p, \quad p \geq 2 \\ M = N_q, \quad q \geq 3 \end{array}\right.$



$\chi = -2$

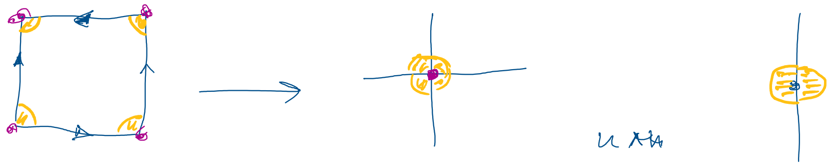
$\chi(M)$ 0 1) S^2 — стандартная метрика $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

2) $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$, $\exists$ "фактор-метрика"

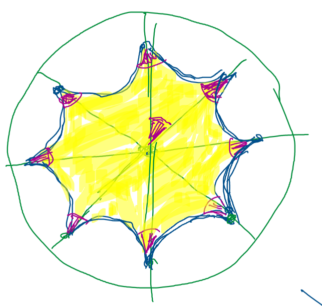


$\chi(M)=0$ Тор и бутылка Клейна

Склеиваем из плоского квадрата

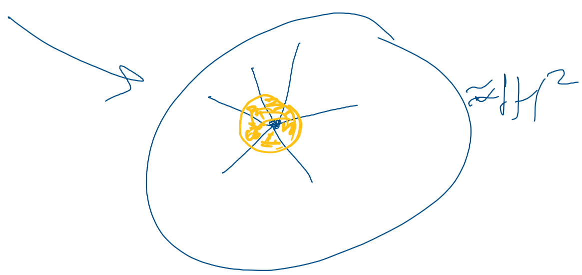


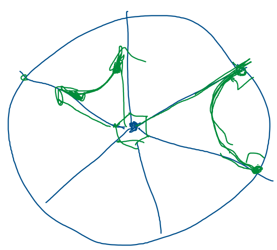
$\chi(M)<0$ Склеиваем из правильного n-угольника ($n = 4p$ или $n = 2q$) вырезанного из $\mathbb{H}^2$

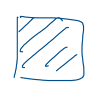


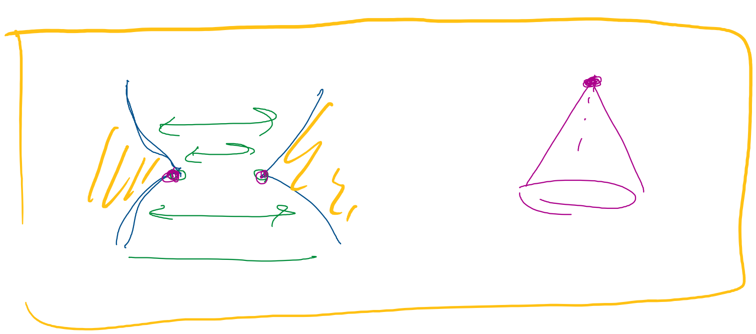
с углами, равными $\frac{2\pi}{n}$

Такой n-угольник ($n>4$) существует по непрерывности.









ДАЛЕ → книжка "Топология-4"